Roll No. ....

E–3137

B. A. (Part I) EXAMINATION, 2021

(New Course)

MATHEMATICS

Paper Third

(Vector Analysis and Geometry)

Time : Three Hours] [*Maximum Marks : 50*

नोट : प्रत्येक प्रश्न से कोई दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Attempt any *two* parts of each question. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. यदि :

$$\vec{a} = \sin\theta i + \cos\theta j + \theta k$$

$$\vec{b} = \cos\theta i - \sin\theta j - 3k$$

$$\vec{c} = 2i + 3j - k$$

हो, तो $\theta = 0$ पर $\frac{d}{d\theta}\left[\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)\right]$ ज्ञात कीजिए।

If "

$$\vec{a} = \sin\theta i + \cos\theta j + \theta k$$

$$\vec{b} = \cos\theta i - \sin\theta j - 3k$$

$$\vec{c} = 2i + 3j - k$$

find $\frac{d}{d\theta}\left[\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)\right]$ at $\theta = 0$.

(ब) यदि :

$$\vec{r} = x^2yzi - 2xz^3j + xz^2k$$

तथा $\vec{s} = 2zi + yj - x^2k$, तो बिन्दु $(1, 0, -2)$ पर

$\frac{\partial^2\left(\vec{r} \times \vec{s}\right)}{\partial x\,\partial y}$ ज्ञात कीजिए।

If :

$$\vec{r} = x^2yzi - 2xz^3j + xz^2k$$

and $\vec{s} = 2zi + yj - x^2k$,

find $\frac{\partial^2\left(\vec{r} \times \vec{s}\right)}{\partial x\,\partial y}$ at the point $(1, 0, -2)$.

(स) डेल संकारक का उपयोग कीजिये और $x^2 + y^2 + z^2$ का $(1, 2, 3)$ पर $\vec{r} = 3i + 4j$ की दिशा में दिक् अवकलज ज्ञात कीजिए।

Use del operator to find the derivative of $x^2 + y^2 + z^2$ at (1, 2, 3) in the direction of $\vec{r} = 3i + 4j$.

इकाई—2

(UNIT—2)

2\. (अ) F का वक्र C के परितः परिसंचारण ज्ञात कीजिए, जहाँ $\vec{F} = e^x \sin yi + e^x \cos yj$ तथा C आयत है, जिसके शीर्ष $(0, 0), (1, 0), \left(1, \frac{\pi}{2}\right), \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ हैं।

Find the circulation of F along the curve C, where $\vec{F} = e^x \sin yi + e^x \cos yj$ and C is the rectangle whose vertices are $(0, 0), (1, 0), \left(1, \frac{\pi}{2}\right), \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(ब) गॉस डायवर्जेन्स प्रमेय का सत्यापन :

$$F = \left(x^2 - yz\right)i + \left(y^2 + 2x\right)j + \left(z^2 - xy\right)k$$

के लिए घन $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1$ के ऊपर कीजिए।

Verify Gauss Divergence theorem for :

$$F = \left(x^2 - yz\right)i + \left(y^2 + zx\right)j + \left(z^2 - xy\right)k$$

taken over the cube $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1$.

अथवा

(*Or*)

(स) समतल में ग्रीन के प्रमेय का सत्यापन :

$$I = \oint_C \left[\left(x + 2y\right)dx + \left(y + 3x\right)dy\right]$$

के लिए कीजिए, जहाँ C वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ है।

Use Green's theorem in plane to evaluate :

$$I = \oint_C \left[\left(x + 2y\right)dx + \left(y + 3x\right)dy\right]$$

where C is the circle $x^2 + y^2 = 1$.

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) दर्शाइये कि परवलय :

$$\left(a^2 + b^2\right)\left(x^2 + y^2\right) = \left(bx + ay - ab\right)^2$$

की नाभिलम्ब $\dfrac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ है।

Show that the latus-rectum of the parabola :

$$\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)=(bx+ay-ab)^2$$

is $\dfrac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

(ब) परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जो शांकव $x^2+xy+y^2-2x-2y+1=0$ को उस बिन्दु पर स्पर्श करता है जहाँ रेखा $x+y+1=0$ इसे काटती है।

Find the equation to the parabola which touches the conic $x^2+xy+y^2-2x-2y+1=0$ at the point where it is cut by the line $x+y+1=0$.

(स) यदि PSP′ तथा QSQ′ किसी शांकव की दो लम्बरूप नाभिगत जीवायें हैं, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{1}{\mathrm{SP.SP'}}+\frac{1}{\mathrm{SQ.SQ'}}$$

अचर है।

If PSP′ and QSQ′ be two perpendicular focal chords of a conic, prove that

$$\frac{1}{\mathrm{SP.SP'}}+\frac{1}{\mathrm{SQ.SQ'}}$$

is constant.

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) त्रिज्याओं r_1 और r_2 के दो गोले लाम्बिक प्रतिच्छेद करते हैं। सिद्ध कीजिए कि उभयनिष्ठ वृत्त की त्रिज्या :

$$\frac{r_1 r_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}$$

है।

Two spheres of radii r_1 and r_2 intersect orthogonally. Prove that the radius of the common circle is :

$$\frac{r_1 r_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}.$$

(ब) उस शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष $(5, 4, 3)$ और आधार वक्र $3x^2 + 2y^2 = 6,\ y + z = 0$ है।

Find the equation of the cone whose vertex is (5, 4, 3) and base curve is $3x^2 + 2y^2 = 6,\ y + z = 0$.

(स) उस बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके जनक सरल रेखा $x = -\frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ के समान्तर हैं तथा निर्देशक वक्र दीर्घवृत्त $x^2 + 2y^2 = 1, z = 3$ है।

Find the equation of the cylinder whose generators are parallel to line $x = -\frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ and the guiding curve is the ellipse $x^2 + 2y^2 = 1, z = 3$.

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) यदि निर्देशक अक्ष समकोणिक हों, तो दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ के बराबर संयुग्मी व्यासों का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।

If the director axes are rectangular, find the locus of the equal conjugate diameters of the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

(ब) दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ का समतल $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ द्वारा प्रतिच्छेद का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Find the area of the section of the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ by the plane $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

(स) अतिपरवलयज :

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$$

के बिन्दु $(1, 2, -3)$ से होकर जाने वाले जनकों के समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of generating lines of the hyperboloid $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$ which pass through the point (1, 2, –3).