17 प्रायोगिक ज्यामिति (Practical Geometry)

FZW93D

मुख्य अवधारणाएँ

★ कोण एवं भुजाओं के आधार पर त्रिभुजों की रचना

17.1 भूमिका

हम विभिन्न प्रकार के आकारों से परिचित हैं। पिछली कक्षाओं में इनमें से कुछ आकारों की रचना करना सीखा है। उदाहरणतः एक दिए गए लंबाई का रेखाखंड, रेखाखंड पर लंब रेखा, कोण, कोण का समद्विभाजक, वृत्त इत्यादि की रचना करना जानते हैं। अब हम समांतर रेखाएँ तथा विभिन्न प्रकार के त्रिभुजों की रचना करना सीखेंगे।

17.2 दी गई सरल रेखा के बाहर किसी बिन्दु से उस रेखा के समानांतर रेखा खींचना :

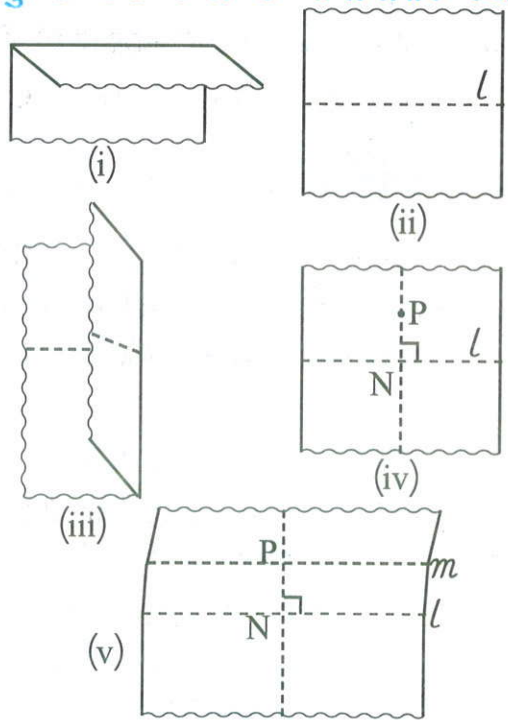
क्रियाकलाप

(i) एक कागज के शीट को बीच से मोड़कर एक निशान बनाइए। इस निशान को रेखा l से निरूपित करते हैं।

ii) कागज को खोल कर रेखा l के बाहर एक बिन्दु P अंकित कीजिए।

(iii) इस बिन्दु से एक रेखा PN खिंचिए जो रेखा l पर लंब हो।

(iv) अब, बिन्दु P से होकर इस लंब के लंबवत एक मोड़ का निशान बनाइए। इस नये रेखा का नाम m रखिए।



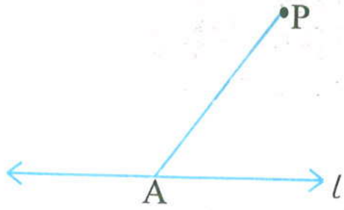
अब , $l \parallel m$ है। क्या हम देख सकते हैं कि ऐसा क्यों है?

यहाँ रेखाएँ l और m कौन–से गुण के आधार पर समांतर है?
आप तिर्यक रेखा और समांतर रेखाओं से संबंधित गुणों में से किसी भी गुण का प्रयोग कर इस रचना को केवल पैमाना (रूलर) और परकार का प्रयोग करके कर सकते हैं।

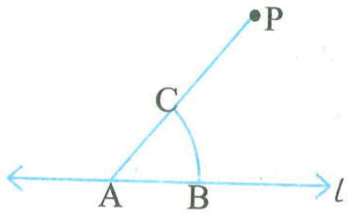
रचना के चरण :

(i) एक रेखा l और उसके बाहर एक बिन्दु P लीजिए।

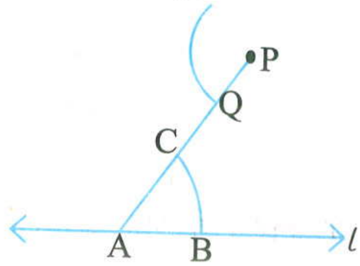
(ii) रेखा l पर कोई बिन्दु A लीजिए एवं P को A से मिलाइए।



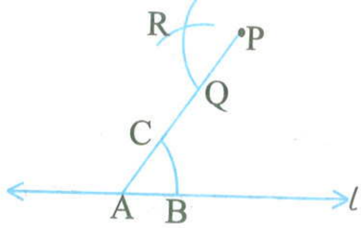
(iii) A को केन्द्र मानकर किसी त्रिज्या के वृत्त चाप खींचिए जो l और P को क्रमशः B और C पर काटता है।



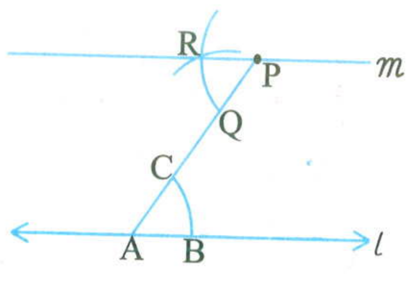
(iv) फिर P को केन्द्र मानकर उसी त्रिज्या से एक चाप खींचिए जो AP को Q बिंदु पर काटता है।



(v) अब Q को केन्द्र मानकर BC त्रिज्या से दूसरा चाप खींचिए जो पहले चाप को R बिन्दु पर काटता है।



(vi) PR को मिलाइए और उसे दोनों ओर बढ़ा दीजिए। यह रेखा m है।



$\angle BAC$ और $\angle QPR$ एकांतर अंतःकोण हैं, जो परस्पर बराबर हैं। इसलिए $l \parallel m$ है।

"JCERT Textbook for Free Distribution: 2021-22"

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

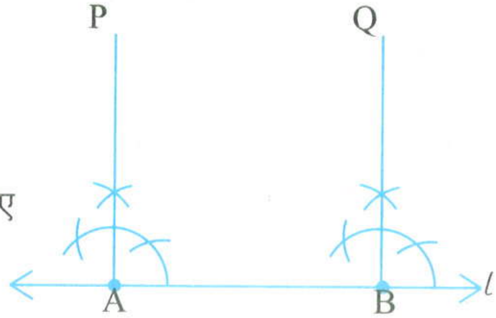
1. ऊपर की रचना में, क्या आप P से होकर अन्य रेखा खींच सकते हैं जो l के समांतर हो?
2. क्या आप बराबर संगत कोण के आधार पर $l \parallel m$ खींच सकते हैं?

17.3 दी गई दूरी पर एक सरल रेखा के समांतर दूसरी सरल रेखा खींचना।

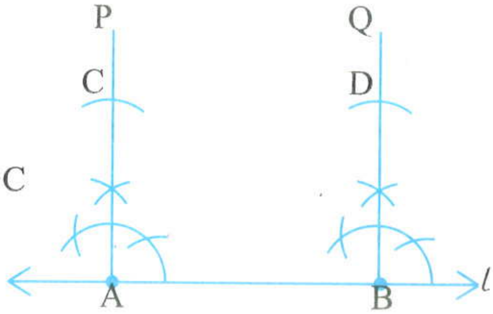
रचना के चरण :

(i) सरल रेखा l पर कोई दो बिन्दु A और B लीजिए।

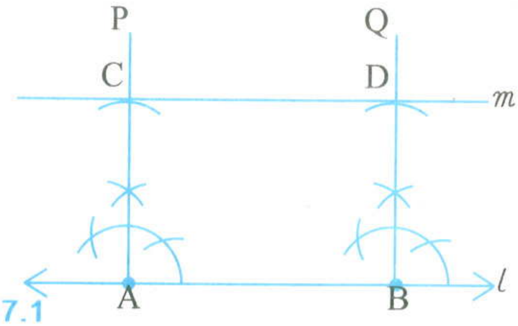
(ii) बिन्दु A और B से दो सरल रेखाएँ क्रमशः AP और BQ इस प्रकार खींचिए कि वे l के साथ लंब हो ।



(iii) A और B को केन्द्र मानकर दी हुई दूरी d के बराबर त्रिज्या से AP और BQ पर एक चाप खींचिए जो AP को C और BQ को D बिन्दु पर काटता है।



(iv) बिन्दु C और D को मिलाने पर अभीष्ट रेखा m प्राप्त होता है।



प्रश्नावली–17.1

(1) एक सरल रेखा AB खींचिए और इसके बाहर स्थित कोई बिन्दु C लीजिए। केवल स्केल और परकार का प्रयोग करते हुए, C से होकर AB के समांतर एक रेखा PQ खींचिए।

(2) एक सरल रेखा AB से 6 सेमी दूरी पर सरल रेखा CD खींचिए जो AB के साथ समांतर हो।

(3) एक सरल रेखा AB =8 सेमी के समांतर दूसरी सरल रेखा CD = 10 सेमी खींचिए।

(4) एक सरल रेखा AB से 4 सेमी और 6 सेमी की दूरी पर ऊपर और नीचे दो समांतर रेखा खींचिए।

17.3 त्रिभुजों की रचना

हम भुजाओं और कोणों के आधारों पर त्रिभुजों को वर्गीकृत करना तथा त्रिभुजों से संबंधित निम्नलिखित महत्वपूर्ण गुणों के बारे में जानते हैं :

(i) एक त्रिभुज का बाह्यकोण उसके दोनों अभिमुख अंतःकोणों के योगफल के बराबर होता है।

(ii) त्रिभुज के तीनों अंतःकोणों का योग 180^0 होता है।

(iii) त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं की लंबाइयों का योग तीसरी भुजा की लंबाई से अधिक होता है।

(iv) एक समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योगफल के बराबर होता है।

त्रिभुजों की सर्वांगसमता' वाले अध्याय में हमने देखा था कि एक त्रिभुज प्राप्त किया जा सकता है, यदि उसके निम्नलिखित माप समूहों में से कोई एक दिया हुआ हो –

(i) तीन भुजाओं की माप

(ii) दो भुजाएँ और उनके बीच का कोण

(iii) दो कोण और उनके बीच की भुजा

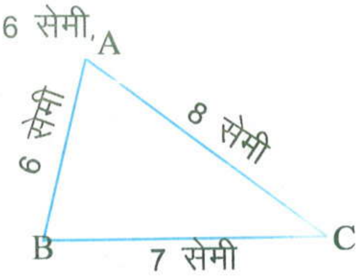
(iv) समकोण त्रिभुज के लिए, कर्ण और एक पाद (leg)

17.4 तीनों भुजाओं की लंबाई के आधार पर एक त्रिभुज की रचना की... (SSS कसौटी)

यहाँ हम त्रिभुजों की रचना करेंगे जब उसकी तीनों भुजाएँ ज्ञात हों। पहले हम इसकी एक रफ (Rough) आकृति खींचते हैं, जिससे उसकी भुजाओं का कुछ अनुमान लग जाए और फिर तीनों भुजाओं में से एक भुजा लेकर रचना प्रारंभ करते हैं। निम्नलिखित उदाहरण को समझिए

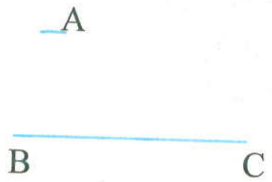
उदहारण : एक त्रिभुज की रचना कीजिए जिसमें भुजा AB = 6 सेमी, BC = 7 सेमी और AC = 8 सेमी हो।

हल :चरण 1 : पहले दिये गये मापों से एक रफ आकृति खींचते हैं।



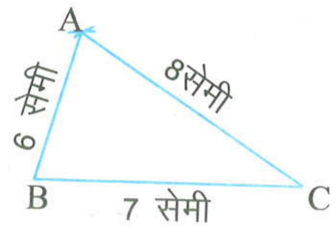
चरण 2 : BC = 7 सेमी की एक रेखाखंड खींचिए।

चरण 3 : B को केन्द्र मानकर 6सेमी त्रिज्या का चाप खींचिए।



चरण 4 : C को केन्द्र मानकर 8 सेमी त्रिज्या का चाप खींचिए, जो A पर प्रतिच्छेद करती हो।

चरण 5 : AB और AC को जोड़िए। अब ΔABC बनकर तैयार है।



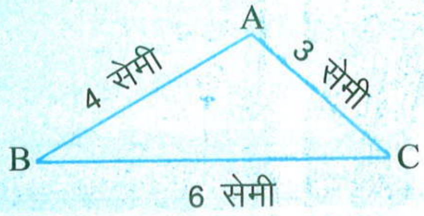
प्रयास कीजिए A

आइए अब एक अन्य त्रिभुज DEF की रचना करें, जिसमें DE = 6 सेमी, EF = 7 सेमी और DF = 8 सेमी है। ΔDEF को काट कर उसे ΔABC पर रखिए। हम देखते है कि ΔDEF, ΔABC को पूर्णतया ढँक लेता है। अर्थात् उसके साथ संपाती हो जाता है। (ध्यान दीजिए कि इन दोनों त्रिभुजों की रचना दी हुई तीन भुजाओं से की गई है।) इस प्रकार, यदि त्रिभुज की तीन भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की संगत तीन भुजाओं के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। यह SSS सर्वांगसमता नियम (या कसौटी) कहलाता है।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

हमने एक ऐसा त्रिभुज खींचने का प्रयास किया, जिसकी रफ आकृति यहाँ दी गई है। पहले हम BC = 8 सेमी खींचा। फिर B को केन्द्र मान कर 4 सेमी त्रिज्या का चाप खींचा तथा C को केन्द्र मान कर 3 सेमी त्रिज्या का चाप खींचा।

परन्तु हम बिन्दु A नहीं प्राप्त कर सके। इसका क्या कारण हैं? इस प्रश्न से संबंधित त्रिभुज के किस गुण को हम जानते है? क्या ऐसे त्रिभुज का अस्तित्व है ? (त्रिभुजों के इस गुण को याद कीजिए : किसी त्रिभुज की दो भुजाओं का योग सदैव तीसरी भुजा से बड़ी होती है।)



प्रश्नावली–17.2

1. ΔPQR की रचना कीजिए, जिसमें PQ = 4.4 सेमी, QR = 6 सेमी और PR = 5.3 सेमी है।

2. 7 सेमी भुजा वाले एक समबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए।

3. ΔABC की रचना कीजिए, जिसमें AB = 6 सेमी, BC = 7.5 सेमी और AC = 8 सेमी है।

4. ΔABC की रचना कीजिए, जिसमें AB = 3 सेमी, BC = 4सेमी और AC = 5 सेमी है। $\angle B$ को मापिए।

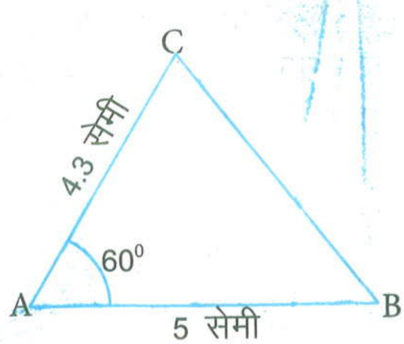
17.5 दो भुजाओं और उनके बीच का कोण के आधार पर त्रिभुज की रचना। (S-A-S कसौटी)

यहाँ, हमें दो भुजाओं और उनके बीच का कोण दिया गया है। पहले हम एक रफ आकृति खींचते हैं, जिससे उसकी भुजाओं और कोण का अनुमान लग जाए। उदाहरण को देखते हैं।

उदाहरण : त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसमें AB = 5 सेमी, AC = 4.3 सेमी और $\angle A = 60^0$ है।

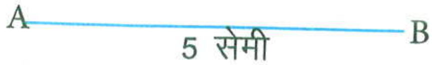
हल :

चरण 1 : पहले हम दी गई मापों के अनुसार एक रफ आकृति खींचते हैं।

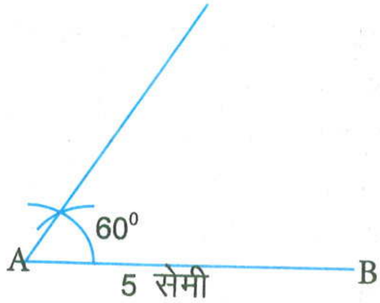


"JCERT Textbook for Free Distribution: 2021-22"

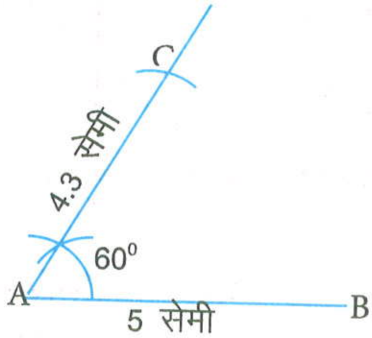
चरण 2 : एक रेखाखंड AB = 5 सेमी खींचिए।



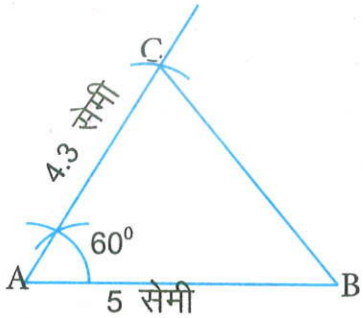
चरण 3 : A पर 60^0 का कोण बनाइए।



चरण 4 : A को केन्द्र मानकर 4.3 सेमी त्रिज्या का चाप खींचिए जो C पर कटता है।



चरण 5 : BC को मिलाइए। अब ΔABC तैयार है।



प्रयास कीजिए B

आइए अब एक अन्य ΔPQR की रचना करें जिसमें PQ = 5 सेमी, PR = 4.3 सेमी और $\angle QPR = 60^0$ हो। इस ΔPQR को काट कर ΔABC पर रखिए। हम क्या देखते हैं? हम देखते हैं कि ΔABC पूर्णतया ΔPQR के साथ संपाती हो जाता है, अर्थात उसे ढँक लेता है। इस प्रकार, यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और उनके मध्य स्थित (बीच का) कोण एक अन्य त्रिभुज की संगत भुजाओं और उनके मध्य स्थित कोण के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। यह SAS सर्वांगसमता नियम या कसौटी है, जिसे हम पिछले अध्याय में पढ़ चुके हैं। (ध्यान दीजिए कि दोनों त्रिभुजों की रचना दी हुई दो भुजाओं और उनके मध्य स्थित (बीच के) कोण द्वारा की गई है।)

"JCERT Textbook for Free Distribution: 2021-22"

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

उपरोक्त रचना में, दो भुजाओं की लंबाई एवं एक कोण का माप दिया हुआ है। अब, निम्नलिखित समस्या का अध्ययन कीजिए :

एक ΔABC में, यदि $AB = 3$ सेमी, $AC = 5$ सेमी और $\angle C = 30^0$ है, तो क्या हम इस तरह के त्रिभुज की रचना कर सकते हैं? हम $AC = 5$ सेमी खींच कर, $\angle C = 30^0$ खींच सकते हैं। $\angle C$ की एक भुजा CA है। बिन्दु B को इस कोण C की दूसरी भुजा पर स्थित होना चाहिए। परन्तु, ध्यान दीजिए कि बिन्दु B को अद्वितीय रूप से निर्धारित नहीं किया जा सकता है। अतः त्रिभुज ABC की रचना करने के लिए, दिए हुए आँकड़े पर्याप्त नहीं हैं। अतः एक अद्वितीय त्रिभुज की रचना तभी की जा सकती है जब उसकी दो भुजाओं और उसके मध्य कोण का माप दिया हो।

प्रश्नावली 17.3

1. ΔABC की रचना कीजिए, जिसमें $AB = 3.8$ सेमी, $\angle A = 60^0$ और $AC = 5$ सेमी है।
2. ΔABC की रचना कीजिए, जिसमें $BC = 6$ सेमी, $\angle B = 90^0$ और $AC = 8$ सेमी है।
3. ΔABC की रचना कीजिए, जिसमें $AB = 7$ सेमी, $\angle A = 30^0$ और $BC = 6$ सेमी है।
4. समद्विबाहु ΔABC की रचना कीजिए, जिसमें समान भुजाएँ 5 सेमी और उनके बीच का कोण 45^0 है।

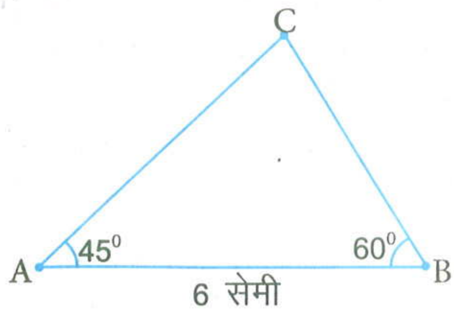
17.6 दो कोणों और उनके बीच की भुजा के आधार पर त्रिभुज की रचना। (A-S-A कसौटी)

पहले एक रफ आकृति खींचिए और फिर दिये हुए रेखाखंड के दोनों अंत बिन्दुओं पर कोण बनाइए। उदाहरण देखिए।

उदाहरण : ΔABC की रचना कीजिए, यदि $AB = 6$ सेमी, $\angle BAC = 45^0$ और $\angle ABC = 60^0$ है।

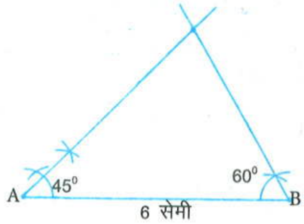
हल :

चरण 1 : पहले हम दिये हुए मापों से एक रफ आकृति खींचते हैं।

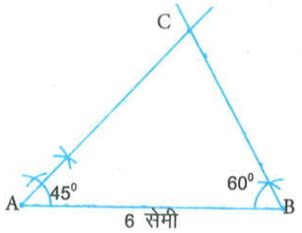


चरण 2 : $AB = 6$ सेमी का एक रेखाखंड खींचिए।

चरण 3 : A बिन्दु पर 45^0 तथा बिन्दु B पर 60^0 का कोण बनाइए।



चरण 4 : दोनों कोण बनाने पर वे एक दूसरे को C पर प्रतिच्छेद करते हैं। अब ΔABC प्राप्त हो जाता है।



प्रयास कीजिए

अब एक अन्य ΔXYZ खींचिए जिसमें $XY = 6$ सेमी, $\angle YXZ = 45^0$ और $\angle XYZ = 60^0$ हो। इस ΔXYZ को काट कर ΔABC पर रखेंगे। हम देखते हैं कि दोनों त्रिभुज पूर्णतः संपाती हो जाता है। इस प्रकार, यदि एक त्रिभुज के दो कोण और उनके मध्य स्थित भुजा दूसरे त्रिभुज के संगत दो कोणों और उनके मध्य स्थित भुजा के बराबर हो, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। यह ASA सर्वांगसमता नियम या कसौटी है।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

उपरोक्त उदाहरण में एक भुजा की लंबाई और दो कोणों के माप दिए गए हैं। अब निम्नलिखित समस्या का अध्ययन कीजिए :

ΔABC में , यदि $AC = 8$ सेमी, $\angle A = 60^0$ और $\angle B = 90^0$ है, तो क्या हम त्रिभुज की रचना कर सकते हैं ?

प्रश्नावली 17.4

1. ΔABC की रचना कीजिए, यदि $\angle A = 60^0$, $\angle B = 30^0$ और $AB = 8$ सेमी है।
2. ΔXYZ की रचना कीजिए, यदि $YZ = 6$ सेमी, $\angle Y = 60^0$ और $\angle Z = 45^0$ है।
3. ΔABC की रचना कीजिए, यदि $BC = 5$ सेमी, $\angle B = \angle C = 60^0$ है।
4. ΔABC की रचना कीजिए, यदि $AB = 7$ सेमी, $\angle A = 45^0$ $\angle C = 75^0$ है।

17.7 एक समकोण त्रिभुज की रचना कीजिए, यदि एक भुजा और कर्ण की लंबाई दी गयी हो। (R-H-S कसौटी)

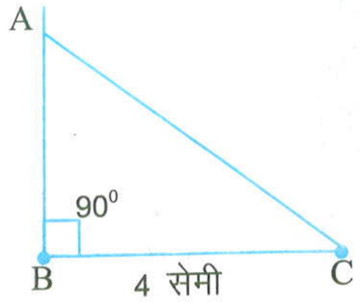
यहाँ, रफ आकृति बनाना सरल है। एक रेखाखंड खींचिए। इसके एक अंत बिन्दु पर एक

"JCERT Textbook for Free Distribution: 2021-22"

समकोण बनाइए। दी हुई भुजा और कर्ण की लंबाई परकार की सहायता से खींचिए एवं त्रिभुज को पूरा कीजिए। उदाहरण देखिए।

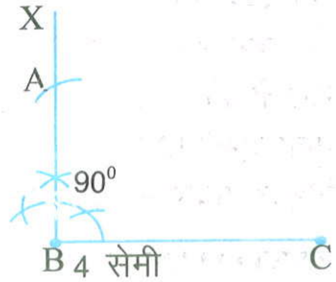
उदाहरण : ΔABC की रचना कीजिए, यदि $\angle B = 90^0$, $BC =$ 4सेमी और $AC =$ 5 सेमी है।

चरण 1 दिये हुए मापों से एक रफ आकृति खींचिए ।

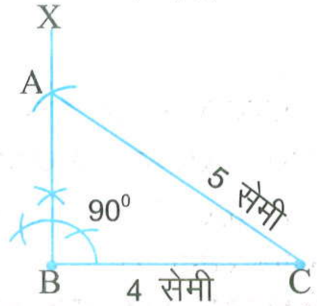


चरण 2 एक रेखाखंड $BC =$ 4 सेमी खींचिए।

चरण 3 $\angle CBX = 90^0$ बनाइए। बिन्दु C को केन्द्र मानकर 5 सेमी त्रिज्या का चाप BX पर खींचिए। यह बिन्दु A है।



चरण 4 AC को मिलाइए और ΔABC प्राप्त हो जाता है।



प्रश्नावली 17.5

1. एक समकोण ΔABC की रचना कीजिए, यदि $\angle B = 90^0$, $AC =$ 7.5 सेमी और $BC =$ 6 सेमी है।
2. एक समकोण ΔABC की रचना कीजिए, यदि कर्ण 6 सेमी और आधार 5.5 सेमी है।
3. एक समद्विबाहु समकोण ΔABC की रचना कीजिए यदि $\angle A = 90^0$ और $AB =$ 4.5 सेमी है।
4. एक समकोण त्रिभुज की रचना कीजिए यदि एक भुजा 5 सेमी और कर्ण 7 सेमी है।
5. एक समकोण त्रिभुज की रचना कीजिए यदि कर्ण 6 सेमी और एक न्यूनकोण 30^0 है।

"JCERT Textbook for Free Distribution: 2021-22"