परिमेय संख्याएँ (Rational Numbers)

अध्याय 1

$\frac{1}{7}$ $\frac{-6}{11}$ $\frac{-1}{12}$

$\frac{11}{24} \div \frac{b}{a} = \frac{-11}{24}$

हम सीखेंगे –

* परिमेय संख्याएँ
* परिमेय संख्याओं की तुलना
* दो परिमेय संख्याओं के बीच की परिमेय संख्या निकालना
* परिमेय संख्याओं के गुणधर्म

GDUSTT

1.1 भूमिका (Introduction)

पिछली कक्षाओं में हमने प्राकृत संख्या, पूर्ण संख्या और पूर्णांक के साथ–साथ परिमेय संख्याओं का अध्ययन किया है। आइए इनका स्मरण करें।

प्राकृत संख्याएँ (Natural Numbers) – गणन संख्याओं को प्राकृत संख्याएँ कहते हैं।

इस प्रकार 1, 2, 3, 4, 5, . . . प्राकृत संख्याएँ हैं।

पूर्ण संख्याएँ (Whole Numbers) – सभी प्राकृत संख्याएँ शून्य के साथ मिलकर पूर्ण संख्याएँ कहलाती हैं।

अतः 0, 1, 2, 3, 4, 5, . . . पूर्ण संख्याएँ हैं।

पूर्णांक (Integers) – सभी पूर्ण संख्याओं तथा ऋणात्मक संख्याओं का संग्रह पूर्णांक कहलाता है।

अतः –3,–2,–1, 0, 1, 2, 3, . . . पूर्णांक हैं।

> पूर्णांक शून्य (0) न धनात्मक है और न ऋणात्मक।

धनात्मक पूर्णांक : 1, 2, 3, 4, . . .

ऋणात्मक पूर्णांक : –1, –2, –3, –4, . . .

आइए संख्याओं को हम साधारण समीकरणों एवं उनसे प्राप्त हल द्वारा समझते हैं।

निम्न समीकरणों पर विचार करते हैं,

$$x + 3 = 11 \qquad \text{.............(1)}$$

हल करने पर $x = 8$ प्राप्त होता है क्योंकि x का यह मान इस समीकरण को संतुष्ट करता है।

यहाँ हल 8, एक प्राकृत संख्या है।

दूसरे समीकरण में,

$$x + 4 = 4 \qquad \text{..............(2)}$$

हल करने पर $x = 0$ प्राप्त होता है, जो प्राकृत संख्या नहीं है। ऐसे में यदि हम प्राकृत संख्याओं तक ही सीमित रहें तो समीकरण (2) को हल नहीं किया जा सकता। अतः प्राकृत संख्याओं के संग्रह में शून्य को शामिल किया गया और इस नये संग्रह को पूर्ण संख्याओं का नाम दिया गया। अब इस समीकरण को देखते हैं,

$$x + 13 = 6 \qquad \text{..............(3)}$$

हमें $x = -7$ प्राप्त होता है, जो कि पूर्ण संख्या नहीं है। अतः ऐसे समीकरणों को हल करने के लिये पूर्ण संख्या भी पर्याप्त नहीं है। इस प्रकार हम पूर्ण संख्याओं से आगे संख्याओं के एक ऐसे नये संग्रह के बारे में सोचने को प्रेरित करते है। जिसमें पूर्ण संख्याओं तथा ऋणात्मक प्राकृत संख्याओं को शामिल किया जा सके और इस नये संग्रह को पूर्णांक नाम दिया गया। इस प्रकार, हमने संख्या पद्धति (Number System) को प्राकृत संख्याओं से पूर्ण संख्याओं तक और पूर्ण संख्याओं से पूर्णांकों तक विस्तारित किया।

आइए अब इन समीकरणों पर विचार करते हैं,

$$2x = 3 \qquad \text{................(4)}$$

$$7x + 5 = 0 \qquad \text{................ (5)}$$

क्या इनके हल पूर्णांक होंगे? समीकरण (4) को हल करने पर $x = \frac{3}{2}$ तथा समीकरण (5) को हल करने पर $x = \frac{-5}{7}$ प्राप्त होते हैं, जो पूर्णांकों के संग्रह में शामिल नहीं है। इसके लिए हम संख्या पद्धति को और आगे विस्तार करने की आवश्यकता पड़ी। इस प्रकार हम परिमेय संख्याओं के समूह की तरफ अग्रसर होते हैं।

1.2 परिमेय संख्याएँ (Rational Numbers)

ऐसी संख्याएँ जिन्हें $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ p तथा q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ हो, परिमेय संख्याएँ कहलाती हैं।

उदाहरणार्थ – $\frac{2}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{-2}{3}, \frac{7}{-15}, \frac{-6}{-15}$ आदि परिमेय संख्याएँ हैं।

यहाँ $\frac{0}{1}, \frac{2}{7}, \frac{-9}{1}$ आदि भी परिमेय संख्याएँ हैं।

"JCERT Text Book for free distribution : 2021-2022"

1.2.1 धनात्मक तथा ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ (Positive and Negative Rational Numbers)

(a) ऐसी परिमेय संख्याएँ, धनात्मक परिमेय संख्याएँ कहलाती हैं यदि उनके अंश तथा हर दोनों का चिह्न समान हो। (धनात्मक या ऋणात्मक)

उदाहरणार्थ : $\frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{-1}{-4}, \frac{-3}{-2}$ इत्यादि धनात्मक परिमेय संख्याएँ हैं।

(b) ऐसी परिमेय संख्याएँ, ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ कहलाती हैं, यदि उनके अंश तथा हर दोनों के चिह्न एक दूसरे के विपरीत हो।

उदाहरणार्थ : $\frac{-2}{3}, \frac{-3}{5}, \frac{3}{-8}, \frac{5}{-12}$ इत्यादि ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ हैं।

1.2.2 पुनरावलोकन (Recapitulation)

पिछली कक्षा में हम परिमेय संख्याओं पर मूल संक्रियाएँ (योग, व्यवकलन, गुणन और विभाजन) पढ़ चुके हैं। इस अध्याय में हम परिमेय संख्याओं के गुणधर्म के बारे में पढ़ेंगे। आइए परिमेय संख्याओं पर अब तक किए गए कार्यों की पुनरावृत्ति करते हैं।

1.2.3 समतुल्य परिमेय संख्याएँ (Equivalent rational numbers) :

एक परिमेय संख्या के अंश और हर को एक ही शून्येतर (Non - Zero) पूर्णांक से गुणा करने या भाग देने पर हमें दी हुई परिमेय संख्या के समतुल्य एक अन्य परिमेय संख्या प्राप्त होती है।

उदाहरणार्थ : $\frac{-2}{3}$ और $\frac{-6}{9}$ समतुल्य परिमेय संख्याएँ हैं। (क्योंकि $\frac{-2\times3}{3\times3}=\frac{-6}{9}$)

इसी प्रकार : $\frac{-15}{21} = \frac{-15\div3}{21\div3} = \frac{-5}{7}$, $\frac{-6}{9} = \frac{-6\div3}{9\div3} = \frac{-2}{3}$

अतः $\frac{-15}{21}$ तथा $\frac{-5}{7}$ समतुल्य परिमेय संख्याएँ हैं।

1.2.4 परिमेय संख्याओं की तुलना (Comparison of Rational Numbers)

हम जानते हैं कि

(a) प्रत्येक धनात्मक परिमेय संख्या शून्य (0) से बड़ी होती है। $\frac{2}{5} > 0$

(b) प्रत्येक ऋणात्मक परिमेय संख्या शून्य (0) से छोटी होती है। $\frac{-2}{5} < 0$

(c) प्रत्येक धनात्मक परिमेय संख्या, प्रत्येक ऋणात्मक परिमेय संख्या से बड़ी होती है। $\frac{2}{5} > \frac{-2}{5}$

"JCERT Text Book for free distribution : 2021-2022"

उदाहरण 1 :– $\frac{3}{-4}$ और $\frac{-5}{6}$ में से कौन–सी संख्या बड़ी है?

हल :– एक संख्या = $\frac{3}{-4} = \frac{3\times(-1)}{(-4)\times(-1)} = \frac{-3}{4}$

दूसरी संख्या = $\frac{-5}{6}$

4 और 6 का ल० स० = 12

$\therefore \frac{-3}{4} = \frac{(-3)\times 3}{4\times 3} = \frac{-9}{12}$

तथा $\frac{-5}{6} = \frac{-5\times 2}{6\times 2} = \frac{-10}{12}$

स्पष्टतः $-9 > -10 = \frac{-9}{12} > \frac{-10}{12}$

अतः $\frac{-3}{4} > \frac{-5}{6}$

1.2.5 परिमेय संख्या का मानक रूप (Standard form of a rational number) :–

एक परिमेय संख्या मानक रूप में व्यक्त की जाती है, यदि उसका हर धनात्मक पूर्णांक हो तथा उसके अंश और हर में 1 के अतिरिक्त कोई सार्व गुणनखण्ड न हो।

उदाहरण :– $\frac{3}{5}, \frac{-7}{8}, \frac{2}{5}, \frac{-8}{11}$ इत्यादि।

उदाहरण 2 :– मानक रूप में बदलिए।

(a) $\frac{36}{-24}$ (b) $\frac{-9}{-12}$

हल :– (a) 36 और 24 का म०स० 12 है।

अतः $\frac{36}{-24} = \frac{36\div 12}{-24\div 12} = \frac{-3}{2}$

(b) 9 और 12 का म०स० = 3 है।

अतः $\frac{-9}{-12} = \frac{-9\div 3}{-12\div 3} = \frac{3}{4}$

1.2.6 दो परिमेय संख्याओं के बीच की परिमेय संख्या निकालना :–

उदाहरण 3 :– निम्नलिखित परिमेय संख्याओं के बीच में तीन परिमेय संख्याएँ लिखिए।

(a) $\frac{1}{3}$ और $\frac{3}{5}$ (b) –2 और –1

हल :– (a) पहले हर को समान करेंगे।

इसके लिए 5 और 3 का ल० स० = 15

इसलिए, $\frac{3}{5} = \frac{3\times3}{5\times3} = \frac{9}{15}$

और, $\frac{1}{3} = \frac{1\times5}{3\times5} = \frac{5}{15}$

अब, $\frac{5}{15} < \frac{6}{15} < \frac{7}{15} < \frac{8}{15} < \frac{9}{15}$

अतः $\frac{1}{3}$ और $\frac{3}{5}$ के बीच तीन परिमेय संख्याएँ $\frac{6}{15}, \frac{7}{15}, \frac{8}{15}$ हैं।

(b) हर को समान करने के लिए।

$-1 = \frac{-5}{5}$ तथा $-2 = \frac{-10}{5}$ लिखते हैं।

अतः $\frac{-10}{5} < \frac{-9}{5} < \frac{-8}{5} < \frac{-7}{5} < \frac{-6}{5} < \frac{-5}{5}$

या, $-2 < \frac{-9}{5} < \frac{-8}{5} < \frac{-7}{5} < \frac{-6}{5} < -1$

अतः –2 और –1 के बीच तीन परिमेय संख्याएँ हैं:–

$\frac{-9}{5}, \frac{-8}{5}, \frac{-7}{5}$

उदाहरण 4 : निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को अवरोही क्रम में लिखिए।

$\frac{5}{8}, \frac{7}{12}, \frac{-5}{16}, \frac{-1}{3}$

हल : हरों 8, 12, 16 और 3 का ल०स० = 48

$\frac{5}{8} = \frac{5\times6}{8\times6} = \frac{30}{48}$; $\frac{7}{12} = \frac{7\times4}{12\times4} = \frac{28}{48}$

$\frac{-5}{16} = \frac{-5\times3}{16\times3} = \frac{-15}{48}$; $\frac{-1}{3} = \frac{-1\times16}{3\times16} = \frac{-16}{48}$

अब, चूँकि $30 > 28 > (-15) > (-16)$

या, $\frac{5}{8} > \frac{7}{12} > \frac{-5}{16} > \frac{-1}{3}$

अतः अवरोही क्रम $\frac{5}{8}, \frac{7}{12}, \frac{-5}{16}, \frac{-1}{3}$ है।

प्रश्नावली 1.1

(1) $\frac{-4}{5}$ को एक ऐसे परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कीजिए जिसका हर निम्नलिखित हो।

(a) 30 (b) -45

(2) $\frac{-36}{60}$ को एक परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कीजिए जिसका हर 5 हो।

"JCERT Text Book for free distribution : 2021-2022"

(3) निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को उनके मानक रूप में लिखिए।

(a) $\frac{-8}{6}$ (b) $\frac{-12}{30}$ (c) $\frac{16}{-24}$ (d) $\frac{-28}{-35}$

(4) निम्नलिखित में प्रत्येक युग्म में कौन–सी संख्या बड़ी है?

(a) $\frac{2}{3}, \frac{5}{2}$ (b) $\frac{1}{2}, 0$ (c) $\frac{-2}{5}, 0$ (d) $\frac{-4}{7}, \frac{4}{7}$ (e) $\frac{-5}{6}, \frac{-4}{3}$

(5) संकेतों $>$, $<$ और $=$ में से चुनकर रिक्त स्थानों को भरिए।

(a) $\frac{-3}{7}$ .... $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{-2}{3}$ .... $\frac{5}{-8}$ (c) 0......... $\frac{-5}{6}$

(d) $\frac{-2}{-3}$ .... 0 (e) $\frac{-2}{11}$ .... $\frac{-3}{22}$ (f) $\frac{1}{-3}$ ...... $\frac{-1}{4}$

(6) निम्नलिखित के समतुल्य तीन परिमेय संख्याएँ लिखिए।

(a) $\frac{2}{5}$ (b) $\frac{5}{-7}$ (c) $\frac{3}{8}$ (d) $\frac{-2}{-3}$

(7) निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को आरोही क्रम में लिखिए।

(a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{9}, \frac{4}{3}, \frac{1}{6}$ (b) $\frac{4}{5}, \frac{-2}{7}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{3}$

(c) $\frac{-3}{4}, \frac{5}{12}, \frac{-7}{16}, \frac{11}{-24}$ (d) $\frac{1}{6}, \frac{2}{9}, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}$

(8) निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को अवरोही क्रम में लिखिए।

(a) $3, \frac{11}{6}, \frac{8}{3}, \frac{1}{3}$ (b) $\frac{2}{3}, \frac{-3}{7}, \frac{5}{21}, \frac{13}{42}$

(c) $\frac{-3}{10}, \frac{7}{-15}, \frac{-9}{20}, \frac{-11}{30}$

(9) निम्नलिखित परिमेय संख्याओं के बीच में तीन परिमेय संख्याएँ लिखिए?

(a) -1 और 0 (b) $\frac{-1}{2}$ और $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{-5}{7}$ और $\frac{-3}{8}$

(10) निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए।

(a) $\frac{5}{9} + \frac{-8}{9}$ (b) $\frac{-9}{10} + \frac{22}{15}$ (c) $\frac{-8}{19} + \frac{-2}{57}$ (d) $\frac{7}{12} - \frac{17}{24}$

(11) निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए।

(a) $\frac{5}{7} \times (\frac{-3}{8})$ (b) $\frac{3}{-5} \times \frac{-5}{3}$ (c) $(-1) \times (\frac{-7}{8})$ (d) $(4) \div \frac{-2}{3}$

(12) दो परिमेय संख्याओं का योगफल –3 है। यदि इनमें से एक परिमेय संख्या $\frac{-11}{6}$ हो तो दूसरी संख्या ज्ञात कीजिए।

(13) −1 में क्या जोड़ा जाए कि $\frac{7}{5}$ प्राप्त हो?

(14) दो परिमेय संख्याओं का गुणनफल −12 है। यदि उनमें से एक संख्या $\frac{-3}{4}$ है तो दूसरी संख्या ज्ञात कीजिए।

(15) $\frac{-7}{13}$ से कौन–सी संख्या को गुणा करें कि 28 प्राप्त हो?

1.3 परिमेय संख्याओं के गुणधर्म (Properties of Rational Number)

पिछली कक्षा में हमने पूर्ण संख्याओं एवं पूर्णांकों के गुणधर्म को जाना है। इस अध्याय में हम परिमेय संख्याओं के गुणधर्म को जानेंगे। इससे पहले आइए, एक बार पुनः संक्षेप में पूर्ण संख्याओं एवं पूर्णांकों के लिए सभी संक्रियाओं पर विभिन्न गुणों को देखते हैं।

पूर्ण संख्याओं के लिए :–

संक्रिया	संवृत	क्रमविनिमेय	साहचर्य
योग	0+3 = 3 (पूर्ण संख्या) 4+5 = 9 (पूर्ण संख्या) पूर्ण संख्याएँ योग (a+b) के अन्तर्गत संवृत हैं।	0+5 = 5 = 5+0 2+4 = 6 = 4+2 a + b = b + a योग क्रमविनिमेय है।	(2+3) +5 = 10 और 2+(3+5) = 10 (2+3)+5 = 2+(3+5) (a + b)+c = a+(b+c) योग साहचर्य है।
व्यवकलन	4−6 = −2, जो एक पूर्ण संख्या नहीं है। पूर्ण संख्याएँ व्यवकलन के अतंर्गत संवृत नहीं है।	4−2 = 2 2−4 = −2 4−2 ≠ 2−4 a− b ≠ b−a व्यवकलन क्रमविनिमेय नहीं है।	5−(3−2) = 5−1 = 4 और(5−3)−2 = 2−2 =0 5−(3−2) ≠ (5−3)−2 a−(b−c) ≠ (a−b)−c व्यवकलन साहचर्य नहीं है।
गुणन	0×3 = 0, (पूर्ण संख्या) 2×5 = 10,(पूर्ण संख्या) पूर्ण संख्याएँ गुणन (a×b) के अन्तर्गत संवृत है।	2×3 = 3×2 = 6 5×7 = 7×5 =35 a×b = b×a गुणन क्रमविनिमेय है।	5×(4×2) =(5×4)×2 = 40 3×(4×0) = (3×4)×0 = 0 a×(b×c) = (a×b)×c गुणन साहचर्य है।

भाग	$4 \div 7 = \frac{4}{7}$ यह एक पूर्ण संख्या नहीं है। पूर्ण संख्याएँ भाग के अंतर्गत संवृत नहीं है।	$6 \div 3 = 2$, $3 \div 6 = \frac{1}{2}$ $(6 \div 3) \neq (3 \div 6)$ $(a \div b) \neq (b \div a)$ भाग क्रमविनिमेय नहीं है।	$(6 \div 3) \div 2 = 2 \div 2 = 1$ और $6 \div (3 \div 2) = 6 \div \frac{3}{2} = 4$ $(6 \div 3) \div 2 \neq 6 \div (3 \div 2)$ $(a \div b) \div c \neq a \div (b \div c)$ भाग साहचर्य नहीं है।

प्रयास कीजिए : A निम्नलिखित सारणी में पूर्णांकों के लिए कुछ उदाहरणों की सहायता से सभी संक्रियाओं पर उनके गुणधर्मों को बताइए।

संक्रिया	संवृत	क्रमविनिमेय	साहचर्य
योग	$-5+4 = -1$ पूर्णांक है। $-7+(-3) = -10$ पूर्णांक है। पूर्णांक योग के अन्तर्गत संवृत है।	योग क्रमविनिमेय है।	क्या $(-2)+[3+(-5)]$ $=[(-2)+3]+(-5)$ योग साहचर्य है?
व्यवकलन	$4-6 = -2$ पूर्णांक है। $6-4 = 2$ पूर्णांक है। व्यवकलन के अतंर्गत संवृत नहीं है।	क्या $5-(-3) = -3-5$ है व्यवकलन क्रमविनिमेय __________	.... व्यवकलन साहचर्य
गुणन	$5 \times 4 = 20$ पूर्णांक है। $-5 \times 4 = -20$ पूर्णांक है। गुणन के अन्तर्गत संवृत है।	गुणन क्रमविनिमेय ________	क्या $2 \times [(-4) \times (-5)]$ $[(-5)] =$ $[2 \times (-4)] \times (-5)$ गुणन साहचर्य है?
भाग	$4 \div 3 = \frac{4}{3}$ पूर्णांक है। $-8 \div 7 = \frac{-8}{7}$ पूर्णांक भाग के अंतर्गत संवृत नहीं है।	भाग क्रमविनिमेय ______	क्या $[(-10) \div 5] \div (-2)$ $=$ $(-10) \div [5 \div (-2)]$ भाग साहचर्य है?

1.3.1 परिमेय संख्याओं के योग एवं व्यवकलन के गुण

(I) संवृत गुण

(a) योग का संवृत गुण :– परिमेय संख्याओं का योग निकालना हम सीख चुके हैं। कुछ परिमेय संख्याओं के युग्मों का योग ज्ञात करते हैं।

एक परिमेय संख्या $\left(\frac{a}{b}\right)$	दूसरी परिमेय संख्या $\left(\frac{c}{d}\right)$	दोनों का योग $= \frac{a}{b}+\frac{c}{d}$	क्या प्राप्त परिणाम एंक परिमेय संख्या है?
$\frac{3}{4}$	$\frac{-5}{7}$	$\frac{3}{4}+\frac{-5}{7}=\frac{21+(-20)}{28}=\frac{1}{28}$	हाँ
$\frac{-3}{8}$	$\frac{-4}{5}$	$\frac{-3}{8}+\frac{-4}{5}=\frac{-15+(-32)}{40}=\frac{-47}{40}$	हाँ

उपरोक्त सारणी से स्पष्ट है कि दो परिमेय संख्याओं का योग भी एक परिमेय संख्या है। इसे संवृत गुण कहा जाता है। अतः परिमेय संख्याएँ योग के अन्तर्गत संवृत है। अर्थात किन्हीं दो परिमेय संख्याओं $\frac{a}{b}$ तथा $\frac{c}{d}$ के लिए $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ भी एक परिमेय संख्या है।

(c) व्यवकलन के अन्तर्गत संवृत गुण :– क्या हम कह सकते हैं कि परिमेय संख्याओं का अन्तर भी एक परिमेय संख्या होगा? आइए इन उदाहरणों से जानते हैं।

एक परिमेय संख्या$\left(\frac{a}{b}\right)$	दूसरी परिमेय संख्या $\left(\frac{c}{d}\right)$	दोनों का व्यवकलन $= \frac{a}{b}-\frac{c}{d}$	क्या प्राप्त परिणाम एक परिमेय संख्या है?
$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{5}-\frac{2}{15}=\frac{3\times3-2\times1}{15}=\frac{9-2}{15}=\frac{7}{15}$	हाँ
$\frac{-5}{7}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{-5}{7}-\frac{2}{3}=\frac{-5\times3-2\times7}{21}=\frac{-15-14}{21}=\frac{-29}{21}$	हाँ

उपरोक्त सारणी से स्पष्ट है कि दो परिमेय संख्याओं का अंतर भी एक परिमेय संख्या है। इस प्रकार हम कह सकते है कि परिमेय संख्याएँ व्यवकलन के अन्तर्गत संवृत हैं।

अर्थात्, किन्हीं दो परिमेय संख्याओं $\frac{a}{b}$ तथा $\frac{c}{d}$ के लिए $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$ भी एक परिमेय संख्या है।

(II) क्रम विनिमय गुण

(a) योग के अन्तर्गत क्रम विनिमय :– आइए, हम परिमेय संख्या के कुछ युग्मों को इस प्रकार जोड़ते हैं।

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$	$\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$	क्या $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$ है?
$\frac{-1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{-5+6}{15}=\frac{1}{15}$	$\frac{2}{5}+\frac{-1}{3}=\frac{6+(-5)}{15}=\frac{1}{15}$	हाँ, $\frac{-1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{2}{5}+\frac{-1}{3}$
$\frac{-3}{8}+\frac{-5}{6}=\frac{-9+(-20)}{24}=\frac{-29}{24}$	$\frac{-5}{6}+\frac{-3}{8}=\frac{-20+(-9)}{24}=\frac{-29}{24}$	हाँ, $\frac{-3}{8}+\frac{-5}{6}=\frac{-5}{6}+\frac{-3}{8}$

उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि दो परिमेय संख्याओं को किसी भी क्रम में जोड़ा जा सकता है। हम कह सकते हैं कि परिमेय संख्याओं के लिए योग क्रम विनिमय है।

अर्थात्, किन्हीं दो परिमेय संख्याओं $\frac{a}{b}$ तथा $\frac{c}{d}$ के लिए $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$

(b) व्यवकलन के अंतर्गत क्रम विनिमय :– क्या परिमेय संख्याओं के लिए व्यवकलन क्रम विनिमय है? आइए इसकी जाँच करते हैं।

$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$	$\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$	क्या $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$ है?
$\frac{1}{2}-\frac{3}{5}=\frac{5-6}{10}=\frac{-1}{10}$	$\frac{3}{5}-\frac{1}{2}=\frac{6-5}{10}=\frac{1}{10}$	नहीं, $\frac{1}{2}-\frac{3}{5}\neq\frac{3}{5}-\frac{1}{2}$
$\frac{4}{3}-\frac{5}{7}=\frac{28-15}{21}=\frac{13}{21}$	$\frac{5}{7}-\frac{4}{3}=\frac{15-28}{21}=\frac{-13}{21}$	नहीं, $\frac{4}{3}-\frac{5}{7}\neq\frac{5}{7}-\frac{4}{3}$

उपर्युक्त सारणी से स्पष्ट है कि परिमेय संख्याओं के लिए व्यवकलन क्रम–विनिमय नहीं है। **अर्थात्, किन्हीं दो परिमेय संख्याओं $\frac{a}{b}$ तथा $\frac{c}{d}$ के लिए $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\neq\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$**

(III) साहचर्य गुण (Associative Property)

(a) योग की साहचर्यता :– परिमेय संख्या $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{-3}{5}$, $c=\frac{5}{6}$ लेते हैं।

इन संख्याओं को दो तरीकों से (समूह में रखकर) जोड़ते हैं।

पहला, a+(b+c) के रूप में,

अर्थात, $\frac{2}{3}+[\frac{-3}{5}+\frac{5}{6}]=\frac{2}{3}+(\frac{-18+25}{30})=\frac{2}{3}+\frac{7}{30}=\frac{20+7}{30}=\frac{27}{30}=\frac{9}{10}$

दूसरा, (a + b) + c के रूप में,

अर्थात, $[\frac{2}{3}+\frac{-3}{5}]+\frac{5}{6}=[\frac{10+(-9)}{15}]+\frac{5}{6}=\frac{1}{15}+\frac{5}{6}=\frac{2+25}{30}=\frac{27}{30}=\frac{9}{10}$

हम पाते हैं कि,

$\frac{2}{3}+[\frac{-3}{5}+\frac{5}{6}]=[\frac{2}{3}+\frac{-3}{5}]+\frac{5}{6}$

अर्थात, **a + (b + c) = (a + b) + c**

उपर्युक्त उदाहरणों में हम देखते हैं कि संख्याओं को किसी भी क्रम में समूह बनाकर जोड़ने से समान योगफल प्राप्त होता है। संख्याओं के इस गुण को साहचर्य गुण कहा जाता है।

अतः हम कह सकते हैं कि परिमेय संख्याओं के लिए योग साहचर्य है।

अर्थात्, किन्हीं तीन परिमेय संख्याओं $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ तथा $\frac{e}{f}$ के लिए $\frac{a}{b}+(\frac{c}{d}+\frac{e}{f})=(\frac{a}{b}+\frac{c}{d})+\frac{e}{f}$

प्रयास कीजिए : B

ज्ञात कीजिए :— क्या $\frac{-1}{2}+[\frac{3}{7}+\frac{-4}{3}]=[\frac{-1}{2}+\frac{3}{7}]+\frac{-4}{3}$?

(b) व्यवकलन की साहचर्यता :— आइए अब जानते हैं कि क्या परिमेय संख्याओं के लिए व्यवकलन भी साहचर्य है?

तीन परिमेय संख्याएँ :— $\frac{-2}{3}$, $\frac{5}{7}$ तथा $\frac{1}{2}$ लेते हैं।

क्या $\frac{-2}{3}-(\frac{5}{7}-\frac{1}{2})=[\frac{-2}{3}-\frac{5}{7}]-\frac{1}{2}$ है?

आइए, जाँच करते हैं।

$$\frac{-2}{3}-\left(\frac{5}{7}-\frac{1}{2}\right)=\frac{-2}{3}-\left(\frac{10-7}{14}\right)=\frac{-2}{3}-\frac{3}{14}=\frac{-28-9}{42}=\frac{-37}{42}$$

तथा, $\left[\frac{-2}{3}-\frac{5}{7}\right]-\frac{1}{2}=\left[\frac{-14-15}{21}\right]-\frac{1}{2}=\frac{-29}{21}-\frac{1}{2}=\frac{-58-21}{42}=\frac{-79}{42}$

इसलिए, $\frac{-2}{3}-\left(\frac{5}{7}-\frac{1}{2}\right)\neq\left[\frac{-2}{3}-\frac{5}{7}\right]-\frac{1}{2}$

अतः परिमेय संख्याओं के लिए व्यवकलन साहचर्य नहीं है।

अर्थात्, किन्हीं तीन परिमेय संख्याओं $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ तथा $\frac{e}{f}$ के लिए

$$\frac{a}{b}-(\frac{c}{d}-\frac{e}{f})\neq(\frac{a}{b}-\frac{c}{d})-\frac{e}{f}$$

(IV) योज्य तत्समक (Additive Identity) :– हम जानते हैं कि किसी पूर्ण संख्या में शून्य जोड़ा जाता है तो योग फिर से वही पूर्ण संख्या होती है।

जैसे $2+0=2$ $\quad 0+2=2$

यह तथ्य पूर्णाकों के लिए भी सत्य है।

उदाहरण के लिए : $-3+0=-3$ $\quad 0+(-3)=(-3)$

क्या यह तथ्य परिमेय संख्याओं के लिए भी सत्य है?

"JCERT Text Book for free distribution : 2021-2022"

निम्नलिखित पर विचार कीजिए।

$$\frac{-2}{5}+0=\frac{-2}{5}+\frac{0}{5}=\frac{(-2)+0}{5}=\frac{-2}{5}$$

और $0+\frac{-2}{5}=\frac{0}{5}+\frac{(-2)}{5}=\frac{0+(-2)}{5}=\frac{-2}{5}$

अतः $\frac{-2}{5}+0=0.\ \frac{-2}{5}=-\frac{2}{5}$

इसी प्रकार, $\frac{-3}{7}+0=0+\left(\frac{-3}{7}\right)=-\frac{3}{7}$

उपर्युक्त उदाहरणों से हम पाते हैं कि जब किसी परिमेय संख्या में शून्य जोड़ा जाता है तो योग फिर से वही परिमेय संख्या प्राप्त होती है। इसलिए शून्य परिमेय संख्याओं के लिए योज्य तत्समक कहलाता है।

व्यापक रूप से, किसी परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$ के लिए $\frac{a}{b}+0=\frac{a}{b}=0+\frac{a}{b}$

(V) योज्य प्रतिलोम (Additive Inverse) :– हम जानते हैं कि पूर्णांक 1 का ऋणात्मक –1 तथा –1 का ऋणात्मक 1 होता है।

क्योंकि $1+(-1)=0=(-1)+1$ है।

इसी प्रकार, $2+(-2)=0=(-2)+2$ है।

यहाँ हम कह सकते हैं कि –2 का ऋणात्मक या योज्य प्रतिलोम 2 है तथा 2 का योज्य प्रतिलोम –2 है।

अर्थात् किन्हीं दो पूर्णांकों का योग यदि शून्य (0) प्राप्त होता है तो दोनों पूर्णांक एक दूसरे के योज्य प्रतिलोम कहलाते हैं।

व्यापक रूप से, किसी भी पूर्णांक के लिए $a+(-a)=0=(-a)+a$

इस प्रकार, –a का योज्य प्रतिलोम a तथा a का योज्य प्रतिलोम –a है।

क्या यह तथ्य परिमेय संख्याओं के लिए भी सत्य है?

आइए एक परिमेय संख्या $\frac{5}{6}$ लेते हैं। इसका ऋणात्मक $\frac{-5}{6}$ है।

दोनों को योग करने पर हम पाते हैं, $\frac{5}{6}+\left(\frac{-5}{6}\right)=\frac{5+(-5)}{6}=\frac{0}{6}=0$ (योज्य तत्समक)

साथ ही, $\left(\frac{-5}{6}\right)+\frac{5}{6}=\frac{(-5)+5}{6}=\frac{0}{6}=0$ (योज्य तत्समक)

यहाँ $\frac{5}{6}$ का योज्य प्रतिलोम $\frac{-5}{6}$ तथा $\frac{-5}{6}$ का योज्य प्रतिलोम $\frac{5}{6}$ है।

इसी प्रकार,
$$\frac{-2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}+\frac{-2}{3}=0$$
$$\frac{-7}{8}+\frac{7}{8}=\frac{7}{8}+\frac{-7}{8}=0$$

व्यापक रूप से, किसी भी परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$ के लिए $\mathbf{\frac{a}{b}+(\frac{-a}{b})=0=(\frac{-a}{b})+\frac{a}{b}}$

इस प्रकार $\frac{a}{b}$ का योज्य प्रतिलोम $\frac{-a}{b}$ है तथा $\frac{-a}{b}$ का योज्य प्रतिलोम $\frac{a}{b}$ है।

उदाहरण 5 :– क्रमवनिमेय गुण को सत्यापित कीजिए।
$$\frac{-5}{6}+\frac{2}{7}=\frac{2}{7}+\frac{-5}{6}$$

हल :– बायां पक्ष : $\frac{-5}{6}+\frac{2}{7}=\frac{(-5)\times 7+2\times 6}{42}=\frac{-35+12}{42}=\frac{-23}{42}$

दायां पक्ष : $+\frac{-5}{6}\frac{2}{7}=\frac{2\times 6+(-5)\times 7}{42}=\frac{12-35}{42}=\frac{-23}{42}$

$$\therefore \frac{-5}{6}+\frac{2}{7}=\frac{2}{7}+\frac{-5}{6}$$

अतः क्रमविनिमेय गुण सत्यापित होता है।

उदाहरण 6 :– परिमेय संख्याएँ $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{15}$ तथा $\frac{4}{5}$ के लिए योग का साहचर्य गुण सत्यापित कीजिए।

हल :– $\frac{3}{10}+\left(\frac{7}{15}+\frac{4}{5}\right)=\frac{3}{10}+\left(\frac{7+12}{15}\right)=\frac{3}{10}+\frac{19}{15}=\frac{(3\times3)+(19\times2)}{30}=\frac{9+38}{30}=\frac{47}{30}$

अब $\left(\frac{3}{10}+\frac{7}{15}\right)+\frac{4}{5}=\frac{(3\times3)+(7\times2)}{30}+\frac{4}{5}=\left(\frac{9+14}{30}\right)+\frac{4}{5}=\frac{23}{30}+\frac{4}{5}$

$$=\frac{23+(4\times6)}{30}=\frac{23+24}{30}=\frac{47}{30}$$

$$\therefore \frac{3}{10}+\left(\frac{7}{15}+\frac{4}{5}\right)=\left(\frac{3}{10}+\frac{7}{15}\right)+\frac{4}{5}$$

अतः परिमेय संख्याओं के योग के लिए साहचर्य गुण सत्यापित होता है।

उदाहरण 7 :– योग के अन्तर्गत गुणधर्मों का उपयोग कर निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।
$$\frac{3}{7}+\frac{-6}{11}+\frac{-8}{21}+\frac{5}{22}$$

हल :– $\frac{3}{7}+\frac{-6}{11}+\frac{-8}{21}+\frac{5}{22} = \left[\frac{3}{7}+\frac{-8}{21}\right]+\left[\frac{-6}{11}+\frac{5}{22}\right]$ (क्रमविनिमेयता और साहचर्यता के उपयोग से)

$= \left[\frac{(3\times3)+(-8)\times1}{21}\right]+\left[\frac{(-6)\times2+5\times1}{22}\right]$

$= \left[\frac{9+(-8)}{21}\right]+\left[\frac{-12+5}{22}\right]$

$= \frac{1}{21}+\frac{(-7)}{22} = \frac{1\times22+(-7)\times21}{462} = \frac{22-147}{462} = \frac{-125}{462}$

उदाहरण 8 :– निम्नलिखित के योज्य प्रतिलोम लिखिए।

(a) $\frac{-5}{9}$ (b) $\frac{7}{-11}$ (c) $\frac{-3}{-8}$

हल :– (a) $\frac{-5}{9}$ का योज्य प्रतिलोम $\frac{5}{9}$ है। $\left[\because \frac{-5}{9}+\frac{5}{9}=0\right]$

(b) $\frac{7}{-11}$ को मानक रूप में लिखने पर $\frac{-7}{11}$ होगा।

अतः इसका योज्य प्रतिलोम $\frac{7}{11}$ है।

(c) $\frac{-3}{-8} = \frac{(-3)\times(-1)}{(-8)\times(-1)} = \frac{3}{8}$

अतः इसका योज्य प्रतिलोम $\frac{-3}{8}$ है।

उदाहरण 9 :– सत्यापित कीजिए कि निम्न के लिए $-(-x)$ और x समान है।

(a) $x=\frac{13}{17}$ (b) $x=\frac{-11}{21}$

हल :– (a) $x=\frac{13}{17}$ का योज्य प्रतिलोम $-x=\frac{-13}{17}$ है।

$\frac{13}{17}+(\frac{-13}{17})=0$

$\frac{13}{17}+(\frac{-13}{17})=0$, दर्शाती है कि $\frac{-13}{17}$ का योज्य प्रतिलोम $\frac{13}{17}$ है।

या $-(\frac{-13}{17})=\frac{13}{17}$ अर्थात् $-(-x)=x$

(b) $x=\frac{-11}{21}$ का योज्य प्रतिलोम $-x=\frac{11}{21}$ है, क्योंकि $\frac{-11}{21}+\frac{11}{21}=0$ है।

$\frac{-11}{21}+\frac{11}{21}=0$, दर्शाती है कि $\frac{11}{21}$ का योज्य प्रतिलोम $\frac{-11}{21}$ है।

अर्थात् $-(-x)=x$

से)

प्रश्नावली 1.2

(1) निम्नलिखित में से प्रत्येक का योज्य प्रतिलोम लिखिए।

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{-5}{9}$ (c) -11 (d) $\frac{9}{-7}$

(2) कौन–सा युग्म संवृत है? 'हाँ' अथवा 'नहीं' में उत्तर दें।

(a) (i) $\frac{2}{7}+\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{3}{4}+\frac{2}{7}$

(b) (i) $\frac{5}{9}+\frac{-6}{11}$ (ii) $\frac{-6}{11}+\frac{5}{9}$

(c) (i) $\frac{12}{13}-\frac{-5}{7}$ (ii) $\frac{-5}{7}-\frac{12}{13}$

(d) (i) $\frac{-2}{3}-\frac{-8}{13}$ (ii) $\frac{-8}{13}-\frac{2}{3}$

(3) निम्नलिखित परिमेय संख्याओं के लिए योग के क्रमविनिमेय गुण को सत्यापित कीजिए।

(a) $\frac{-7}{5}$ और $\frac{3}{8}$ (b) $\frac{-5}{8}$ और $\frac{-9}{13}$ (c) $\frac{-2}{7}$ और $\frac{12}{-35}$ (d) $\frac{2}{7}$ और $\frac{12}{-35}$

(4) निम्नलिखित को सत्यापित कीजिए–

(a) $\frac{-2}{3}+\left[\frac{3}{5}+\frac{-5}{6}\right]=\left[\frac{-2}{3}+\frac{3}{5}\right]+\frac{-5}{6}$

(b) $\left[\frac{3}{4}+\frac{-2}{5}\right]+\frac{-7}{10}=\frac{3}{4}+\left[\frac{-2}{5}+\frac{-7}{10}\right]$

(5) योग के क्रमविनिमेय तथा साहचर्य गुणों का उपयोग कर निम्नलिखित परिमेय संख्याओं के मान ज्ञात कीजिए।

(a) $\frac{3}{5}+\frac{7}{3}+\frac{-11}{5}+\frac{2}{3}$ (b) $\frac{1}{2}+\frac{-1}{6}+\frac{-2}{3}+\frac{2}{6}$

(6) रिक्त स्थानों को भरिए–

(a) $\frac{-5}{12}+\frac{-12}{5}=\frac{-12}{5}+$................ (b) $-7+\frac{-13}{8}=\frac{-13}{8}+$........

(c) $\left[\frac{17}{-5}+\frac{-3}{7}+\frac{-7}{8}\right]=\left[(\frac{17}{-5})+\text{................}\right]+\frac{-7}{8}$

(d) $\frac{-11}{7}+$................ = ...$+\frac{11}{7}$

(7) निम्नलिखित प्रश्नों का उत्तर दीजिए :–

(a) वह कौन–सी परिमेय संख्या है, जिसका योज्य प्रतिलोम वह स्वयं है?

(b) किसी ऋणात्मक परिमेय संख्या का ऋणात्मक क्या है?

(d) क्या दो परिमेय संख्याओं का अंतर एक परिमेय संख्या है?

"JCERT Text Book for free distribution : 2021-2022"

(e) क्या योग पर परिमेय संख्याएँ साहचर्य हैं?
(f) क्या योग के अन्तर्गत परिमेय संख्याएँ क्रमविनिमेय हैं?
(g) क्या व्यवकलन के अन्तर्गत परिमेय संख्याएँ क्रमविनिमेय हैं?
(h) क्या व्यवकलन के अन्तर्गत परिमेय संख्याएँ साहचर्य हैं?
(i) वह कौन–सी परिमेय संख्या है जो अपने ऋणात्मक के समान है?
(j) परिमेय संख्याओं के लिए योज्य तत्समक क्या है?

1.3.2 परिमेय संख्याओं के गुणन एवं विभाजन के गुण (Properties of multiplication and division of rational numbers)

(I) संवृत गुण (Closure Property)

(a) गुणन का संवृत (Closure property of multiplication)

परिमेय संख्याओं का गुणनफल निकालना हम सीख चुके हैं। आइए परिमेय संख्याओं के कुछ युग्म लेकर उनके गुणनफल को देखते हैं–

एक परिमेय संख्या $(\frac{a}{b})$	दूसरी परिमेय संख्या $(\frac{c}{d})$	दोनों का गुणनफल $(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d})$	क्या परिणाम एक परिमेय संख्या है?
$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}=\frac{10}{21}$	हाँ
$\frac{-4}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{-4}{5}\times\frac{3}{7}=\frac{-12}{35}$	हाँ

उपर्युक्त सारणी में हम पाते हैं कि दो परिमेय संख्याओं का गुणनफल भी एक परिमेय संख्या है। अतः हम कह सकते हैं कि परिमेय संख्याएँ गुणन के अन्तर्गत संवृत हैं।

अर्थात्, किन्हीं दो परिमेय संख्याओं $\frac{a}{b}$ तथा $\frac{c}{d}$ के लिए $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$ भी एक परिमेय संख्या है।

(b) भाग के अन्तर्गत संवृत गुणधर्म (Closure property under division)

क्या परिमेय संख्याएँ भाग के अन्तर्गत भी संवृत हैं? आइए, हम परिमेय संख्याओं के कुछ युग्म लेकर इसकी जाँच करते हैं।

"JCERT Text Book for free distribution : 2021-2022"

एक परिमेय संख्या $(\frac{a}{b})$	दूसरी परिमेय संख्या $(\frac{c}{d})$	दोनों का भागफल $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$	क्या परिणाम एक परिमेय संख्या है?
$\frac{3}{7}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{7} \div \frac{5}{2} = \frac{3}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{35}$	हाँ
$\frac{-5}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{-5}{3} \div \frac{2}{5} = \frac{-5}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{-25}{6}$	हाँ
$\frac{2}{5}$	$\frac{0}{4}$	$\frac{2}{5} \div \frac{0}{4} = \frac{2}{5} \times \frac{4}{0} =$ अपरिभाषित	नहीं

उपर्युक्त सारणी में हमें दो तरह के परिणाम देखने को मिलते हैं।

एक – जब दो परिमेय संख्याओं को विभाजित किया जाता है तो भागफल एक परिमेय संख्या होती है।

दूसरा – जब किसी परिमेय संख्या को 0 से विभाजित किया जाता है तो परिणाम अपरिभाषित होता है। इस तरह यह एक परिमेय संख्या नहीं है।

हम जानते हैं कि किसी भी परिमेय संख्या $(\frac{a}{b})$ के लिए $(\frac{a}{b}) \div 0$ परिभाषित नहीं है।

अतः परिमेय संख्याएँ भाग के अन्तर्गत संवृत नहीं हैं।

यदि हम शून्य को शामिल नहीं करें तो दूसरी सभी परिमेय संख्याओं का समूह भाग के अन्तर्गत संवृत है।

अर्थात्, किन्हीं दो परिमेय संख्याओं $\frac{a}{b}$ तथा $\frac{c}{d}$ के लिए $(\frac{a}{b} \div \frac{c}{d})$ भी एक परिमेय संख्या है।

यदि और केवल यदि $c \neq 0$

(II) क्रम विनिमय गुण (Commutative Property)

(a) गुणन के अन्तर्गत क्रम–विनिमय

आइए, हम परिमेय संख्याओं के कुछ युग्मों के क्रम बदलकर गुणा करते हैं।

$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$	$\frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$	क्या $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$ है?
$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$	$\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$	हाँ $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$
$\frac{-7}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{-14}{5}$	$\frac{6}{5} \times \frac{-7}{3} = \frac{-14}{5}$	हाँ $\frac{-7}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{6}{5} \times \frac{-7}{3}$

उपर्युक्त सारणी में हम देखते हैं कि दो परिमेय संख्याओं को किसी भी क्रम में गुणा करने पर समान गुणनफल प्राप्त होता है। अतः परिमेय संख्याओं के लिए गुणन क्रम विनिमय है।

अर्थात्, किन्हीं दो परिमेय संख्याओं $\frac{a}{b}$ तथा $\frac{c}{d}$ के लिए,

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\times\frac{a}{b}$$

(b) भाग के अन्तर्गत क्रमविनिमेयः–

क्या परिमेय संख्याओं के लिए भाग क्रमविनिमेय है? इसे जानने के लिए आइए परिमेय संख्याओं के कुछ युग्म लेकर उनका भागफल ज्ञात करते हैं।

$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}$	$\frac{c}{d}\div\frac{a}{b}$	क्या दोनों परिणाम समान है?
$\frac{2}{3}\div\frac{(-8)}{9}=\frac{2}{3}\times\frac{9}{-8}=\frac{-3}{4}$	$\frac{-8}{9}\div\frac{2}{3}=\frac{-8}{9}\times\frac{3}{2}=\frac{-4}{3}$	नहीं $\left[\frac{2}{3}\div\frac{(-8)}{9}\right]\neq\left[\frac{(-8)}{9}\div\frac{2}{3}\right]$
$\frac{-5}{4}\div\frac{3}{7}=\frac{-5}{4}\times\frac{7}{3}=\frac{-35}{12}$	$\frac{3}{7}\div\frac{-5}{4}=\frac{3}{7}\times\frac{4}{-5}=\frac{-12}{35}$	नहीं $\left[\frac{-5}{4}\div\frac{3}{7}\right]\neq\left[\frac{3}{7}\div\frac{-5}{4}\right]$

उपर्युक्त उदाहरणों में हम पाते है कि परिमेय संख्याओं को क्रम बदलकर भाग देने पर समान भागफल प्राप्त नहीं होता है। अतः परिमेय संख्याओं के लिए भाग क्रमविनिमेय नहीं है।

अर्थात्, किन्हीं दो परिमेय संख्याओं $\frac{a}{b}$ तथा $\frac{c}{d}$ के लिए, $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}\neq\frac{c}{d}\div\frac{a}{b}$ है।

(III) साहचर्य गुण

(a) गुणन की साहचर्यता :– आइए हम गुणन के लिए साहचर्यता की जाँच करते हैं।

हम पाते हैं कि $\frac{-5}{3}\times\left(\frac{7}{4}\times\frac{2}{9}\right)=\frac{-5}{3}\times\frac{14}{36}=\frac{-5}{3}\times\frac{7}{18}=\frac{-35}{54}$

$$\left(\frac{-5}{3}\times\frac{7}{4}\right)\times\frac{2}{9}=\frac{-35}{12}\times\frac{2}{9}=\frac{-35}{54}$$

हम पाते हैं कि $\frac{-5}{3}\times\left(\frac{7}{4}\times\frac{2}{9}\right)=\left(\frac{-5}{3}\times\frac{7}{4}\right)\times\frac{2}{9}$

पता कीजिए कि, $\left[\frac{3}{5}\times\left(\frac{-2}{11}\right)\right]\times\frac{5}{4}=\frac{3}{5}\times\left[\left(\frac{-2}{11}\times\frac{5}{4}\right)\right]$ है ?

हम पाते हैं कि परिमेय संख्याओं को किसी भी क्रम में समूह बनाकर गुणा करने से समान गुणनफल प्राप्त होता है। अतः हम कह सकते हैं कि परिमेय संख्याओं के लिए गुणन साहचर्य है। अर्थात्, किन्हीं तीन परिमेय संख्याओं $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ तथा $\frac{e}{f}$ के लिए

$\frac{a}{b}\times\left(\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\right)\times\frac{e}{f}$ है।

(b) भाग की साहचर्यता :– आइए अब देखते हैं कि क्या परिमेय संख्याओं के लिए भाग भी साहचर्य है?

क्या $\frac{2}{3} \div \left[\frac{-1}{4} \div \frac{7}{5}\right] = \left[\frac{2}{3} \div \frac{-1}{4}\right] \div \frac{7}{5}$ है?

बायाँ पक्ष (L.H.S) = $\frac{2}{3} \div \left[\frac{-1}{4} \div \frac{7}{5}\right] = \frac{2}{3} \div \left(\frac{-1}{4} \times \frac{5}{7}\right) = \frac{2}{3} \div \left(\frac{-5}{28}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{28}{-5} = \frac{-56}{15}$

पुनः दायाँ पक्ष (R.H.S) $\left[\frac{2}{3} \div \frac{-1}{4}\right] \div \frac{7}{5} = \left[\frac{2}{3} \times \frac{4}{-1}\right] \div \frac{7}{5} = \frac{-8}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{-40}{21}$

यहाँ L.H.S≠R.H.S

अर्थात्, $\frac{2}{3} \div \left[\frac{-1}{4} \div \frac{7}{5}\right] \neq \left[\frac{2}{3} \div \frac{-1}{4}\right] \div \frac{7}{5}$

पता कीजिए क्या $-\frac{6}{7} \div \left(\frac{8}{14} \div \frac{12}{21}\right) = \left(\frac{6}{7} \div \frac{8}{14}\right) \div \frac{12}{21}$ है?

अतः, परिमेय संख्याओं के लिए भाग साहचर्य नहीं है।

अर्थात्, किन्हीं तीन परिमेय संख्याओं $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ तथा $\frac{e}{f}$ के लिए

$$\frac{a}{b} \div \left(\frac{c}{d} \div \frac{e}{f}\right) \neq \left(\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}\right) \div \frac{e}{f}$$

परिमेय संख्याओं के अन्तर्गत	संवृत	क्रमविनिमेय	साहचर्य
गुणन.	हाँ	हाँ	हाँ
भाग	नहीं	नहीं	नहीं

(IV) गुणात्मक तत्समक (Multiplicative Identity) :–

हम जानते हैं कि
$$3 \times 1 = 3 = 1 \times 3$$
$$(-3) \times 1 = -3 = 1 \times (-3)$$
$$(-5) \times 1 = -5 = 1 \times (-5)$$

अर्थात्, जब हम किसी पूर्ण संख्या या पूर्णांक को 1 से गुणा करते हैं तो हमें वही पूर्ण संख्या या पूर्णांक प्राप्त होता है। इस तरह हम कहते हैं कि 1 पूर्ण संख्याओं या पूर्णांकों के लिए गुणात्मक तत्समक है।

अब आइए जाँच करते हैं कि क्या 1 परिमेय संख्याओं के लिए भी गुणात्मक तत्समक है।

$$\frac{-2}{5} \times 1 = \frac{-2}{5} = 1 \times \frac{-2}{5}$$
$$\frac{-7}{11} \times 1 = \frac{-7}{11} = 1 \times \frac{-7}{11}$$

इस तरह हम पाते हैं कि जब किसी भी परिमेय संख्या को 1 से गुणा करते हैं तो हम उसी परिमेय संख्या को गुणनफल के रूप में पाते हैं। इस प्रकार हम कहते हैं कि 1 परिमेय संख्याओं के लिए भी गुणात्मक तत्समक है।

अर्थात्, किसी भी परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$ के लिए $\frac{a}{b} \times 1 = \frac{a}{b} = 1 \times \frac{a}{b}$ है।

(v) गुणात्मक प्रतिलोम या व्युत्क्रम (Multiplicative Inverse / Reciprocal) :–

निम्नलिखित पर विचार कीजिए–

$\frac{7}{11}$ को किस परिमेय संख्या से गुणा करें ताकि गुणनफल 1 (गुणात्मक तत्समक) हो जाए।

आइए देखते हैं, $\frac{7}{11} \times \frac{11}{7} = 1$

अर्थात्, $\frac{7}{11}$ को $\frac{11}{7}$ से गुणा करने पर गुणनफल 1 होगा। इस तरह $\frac{11}{7}$ परिमेय संख्या $\frac{7}{11}$ का गुणात्मक प्रतिलोम या व्युत्क्रम हुआ।

इसी प्रकार, $\frac{3}{8} \times \frac{8}{3} = 1$ (गुणात्मक तत्समक)

$\frac{-11}{27} \times (\frac{27}{-11}) = 1$ (गुणात्मक तत्समक)

उपर्युक्त उदाहरणों में, $\frac{3}{8}$ का व्युत्क्रम $\frac{8}{3}$ तथा $(\frac{27}{-11})$ का व्युत्क्रम $(\frac{-11}{27})$ है।

अतः हम कहेंगे कि जब दो परिमेय संख्याओं को गुणा किया जाता है और यदि उनका गुणनफल गुणात्मक तत्समक 1 के बराबर होता है, तो प्रत्येक परिमेय संख्या दूसरे परिमेय संख्या का गुणात्मक प्रतिलोम या व्युत्क्रम है।

अर्थात्, प्रत्येक शून्येतर परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$ का गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{b}{a}$ है।

अतः $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1 = \frac{b}{a} \times \frac{a}{b}$

इसलिए $\frac{b}{a}$ को $\frac{a}{b}$ का व्युत्क्रम कहा जाता है।

याद रखिए – शून्य का कोई व्युत्क्रम नहीं है। 1 का व्युत्क्रम 1 तथा (–1) का व्युत्क्रम (–1) है।

(VI) शून्य का गुणात्मक गुण :–

निम्नलिखित पर विचार कीजिए

$$\frac{4}{5} \times 0 = 0 = 0 \times \frac{4}{5}$$

$$\frac{-7}{8} \times 0 = 0 = 0 \times \frac{-7}{8}$$

उदाहरणों से स्पष्ट है कि यदि किसी परिमेय संख्या को शून्य से गुणा किया जाता है तो हमें शून्य (0) प्राप्त होता है।

अर्थात्, किसी परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$ के लिए, $(\frac{a}{b} \times 0) = 0 = (0 \times \frac{a}{b})$

(VII) 1 और (-1) से विभाजन (Division by 1 and -1) –

इन्हें देखिए $\frac{4}{9} \div 1 = \frac{4}{9} \times \frac{1}{1} = \frac{4}{9}$

तथा $\frac{4}{9} \div (-1) = \frac{4}{9} \times (\frac{-1}{1}) = \frac{-4}{9}$

अतः किसी परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$ के लिए $\frac{a}{b} \div 1 = \frac{a}{b}$ तथा $\frac{a}{b} \div (-1) = -\frac{a}{b}$

(VIII) स्वयं से विभाजन –

इन्हें देखिए $\frac{2}{5} \div \frac{2}{5} = 1 = \frac{2}{5} \times \frac{5}{2}$

$\frac{-8}{15} \div \frac{-8}{15} = 1 = \frac{-8}{15} \times \frac{15}{8}$

अतः किसी शून्येतर परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$ के लिए $\frac{a}{b} \div \frac{a}{b} = 1$

1.4 परिमेय संख्याओं के लिए गुणन योग एवं व्यवकलन पर वितरकता (बंटन)

(a) तीन परिमेय संख्याएँ $\frac{-3}{4}$, $\frac{-5}{6}$ और $\frac{7}{8}$ लेते हैं।

हम पाते हैं,

$$\frac{-3}{4} \times \left(\frac{-5}{6} + \frac{7}{8}\right) = \frac{-3}{4} \times \left(\frac{-20+21}{24}\right) = \frac{-3}{4} \times \frac{1}{24} = -\frac{1}{32} \text{ ------------------ (i)}$$

$$-\frac{3}{4} \times \frac{-5}{6} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$$

तथा, $-\frac{3}{4} \times \frac{7}{8} = \frac{-21}{32}$

$$\therefore \left(\frac{-3}{4} \times \frac{-5}{6}\right) + \left(\frac{-3}{4} \times \frac{7}{8}\right) = \frac{5}{8} + \frac{-21}{32} \text{ -------------------- (ii)}$$

$$= \frac{20-21}{32} = \frac{-1}{32}$$

अतः $\frac{-3}{4} \times \left(\frac{-5}{6} + \frac{7}{8}\right) = \left(\frac{-3}{4} \times \frac{-5}{6}\right) + \left(\frac{-3}{4} \times \frac{7}{8}\right)$

(b) अब इन्हें देखिए– तीन परिमेय संख्याएँ – $\frac{-4}{7}$, $\frac{5}{13}$ और $\frac{9}{13}$ के लिए

$$\frac{-4}{7}\times\left(\frac{5}{13}-\frac{9}{13}\right)=\frac{-4}{7}\times\left(\frac{5-9}{13}\right)=\frac{-4}{7}\times\frac{-4}{13}=\frac{16}{91} \;....\;(i)$$

फिर, $\frac{-4}{7}\times\frac{5}{13}=\frac{-20}{91}$ तथा, $\frac{-4}{7}\times\frac{9}{13}=\frac{-36}{91}$

$$\therefore \quad \left(\frac{-4}{7}\times\frac{5}{13}\right)-\left(\frac{4}{7}\times\frac{9}{13}\right)=\frac{-20}{91}-\frac{-36}{91}$$

$$=\frac{-20+36}{91}=\frac{16}{91} \qquad (ii)$$

अतः $\frac{-4}{7}\times\left(\frac{5}{13}-\frac{9}{13}\right)=\frac{-4}{7}\times\frac{5}{13}-\frac{-4}{7}\times\frac{9}{13}$

उपर्युक्त उदाहरणों से हम कह सकते हैं कि परिमेय संख्याओं के लिए गुणन, योग एवं व्यवकलन पर वितरण है। व्यापक रूप में, यदि $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ तथा $\frac{e}{f}$ तीन परिमेय संख्याएँ है।

तो $\frac{a}{b}\times\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{a}{b}\times\frac{e}{f}\right)$

और $\frac{a}{b}\times\left(\frac{c}{d}-\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\right)-\left(\frac{a}{b}\times\frac{e}{f}\right)$ है।

प्रयास कीजिए : C

वितरकता के उपयोग से निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए।

(a) $\frac{-3}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{-3}{4}\times\frac{-5}{6}$ (b) $\frac{4}{5}\times\frac{8}{13}-\frac{5}{13}\times\frac{4}{5}$

उदाहरण 10 :– निम्नलिखित को सत्यापित कीजिए।

(a) $\left(\frac{-8}{9}\times\frac{-4}{7}\right)=\left(\frac{-4}{7}\times\frac{-8}{9}\right)$ (b) $\left(\frac{-3}{4}\times\frac{8}{7}\right)=\left(\frac{8}{7}\times\frac{-3}{4}\right)$

हल : (a) L.H.S = $\left(\frac{-8}{9}\times\frac{-4}{7}\right)=\frac{(-8)\times(-4)}{9\times 7}=\frac{32}{63}$

R.H.S = $\left(\frac{-4}{7}\times\frac{-8}{9}\right)=\frac{(-4)\times(-8)}{7\times 9}=\frac{32}{63}$

इसलिए, L.H.S= RHS

(b) L.H.S = $\left(\frac{-3}{4}\times\frac{8}{7}\right)=\frac{(-3)\times 8}{4\times 7}=\frac{-24}{28}=\frac{-6}{7}$

R.H.S = $\left(\frac{8}{7}\times\frac{-3}{4}\right)=\frac{8\times(-3)}{7\times 4}=\frac{-24}{28}=\frac{-6}{7}$ अतः L.H.S = RHS

उदाहरण 11 :– सत्यापित कीजिए।

$$\frac{2}{3} \times (\frac{-6}{7} \times \frac{4}{5}) = (\frac{2}{3} \times \frac{-6}{7}) \times \frac{4}{5}$$

हल :– $\text{L.H.S} = \frac{2}{3} \times (\frac{-6}{7} \times \frac{4}{5}) = \frac{2}{3} \times \frac{(-6) \times 4}{7 \times 5} = \frac{2}{3} \times \frac{-24}{35} = \frac{-16}{35}$

$\text{R.H.S} = (\frac{2}{3} \times \frac{-6}{7}) \times \frac{4}{5} = \frac{2 \times (-6)}{3 \times 7} \times \frac{4}{5} = \frac{-4}{7} \times \frac{4}{5} = \frac{-16}{35}$

$\therefore$ L.H.S = R.H.S

उदाहरण 12 :– निम्नलिखित के गुणात्मक प्रतिलोम (व्युत्क्रम) ज्ञात कीजिए।

(a) $\frac{3}{8}$ (b) $\frac{-5}{9}$ (c) -12 (d) 7 (e) $\frac{11}{-6}$

हल :– (a) $\frac{3}{8}$ का व्युत्क्रम $\frac{8}{3}$ है।

(b) $\frac{-5}{9}$ का व्युत्क्रम $\frac{9}{-5}$ अर्थात $\frac{-9}{5}$ है।

(c) -12 का व्युत्क्रम $\frac{1}{-12}$ अर्थात $\frac{-1}{12}$ है।

(d) 7 का व्युत्क्रम $\frac{1}{7}$ है।

(e) $\frac{11}{-6}$ का व्युत्क्रम $\frac{-6}{11}$ है।

उदाहरण 13 :– निम्नलिखित को सत्यापित कीजिए।

(a) $\frac{-3}{4} \times (\frac{2}{3} + \frac{-5}{6}) = \frac{-3}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{-3}{4} \times \frac{-5}{6}$ (b) $\frac{2}{3} \times (\frac{6}{7} - \frac{5}{14}) = \frac{2}{3} \times \frac{6}{7} - \frac{2}{3} \times \frac{5}{14}$

हल :–

(a) $\text{L.H.S} = \frac{-3}{4} \times (\frac{2}{3} + \frac{-5}{6}) = \frac{-3}{4} \times \left[\frac{4-5}{6}\right] = \frac{-3}{4} \times \frac{-1}{6} = \frac{1}{8}$

$\text{R.H.S} = \frac{-3}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{-3}{4} \times \frac{-5}{6} = \frac{-1}{2} + \frac{5}{8} = \frac{-4+5}{8} = \frac{1}{8}$

(b) $\text{L.H.S} = \frac{2}{3} \times \left[\frac{6}{7} - \frac{5}{14}\right] = \frac{2}{3} \times \left[\frac{12-5}{14}\right] = \frac{2}{3} \times \frac{7}{14} = \frac{1}{3}$

$\text{R.H.S} = \frac{2}{3} \times \frac{6}{7} - \frac{2}{3} \times \frac{5}{14} = \frac{4}{7} - \frac{5}{21} = \frac{12-5}{21} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$

$\therefore$ L.H.S = R.H.S

"JCERT Text Book for free distribution : 2021-2022"

उदाहरण 14 :– मान ज्ञात कीजिए।

(a) $\frac{2}{5}\times\frac{-3}{7}-\frac{1}{14}-\frac{3}{7}\times\frac{3}{5}$ (b) $\frac{15}{8}\times\frac{5}{2}\times\frac{4}{25}\times\frac{6}{11}$

हल :–

(a) $\frac{2}{5}\times\frac{-3}{7}-\frac{1}{14}-\frac{3}{7}\times\frac{3}{5}$

$=\frac{2}{5}\times\frac{-3}{7}-\frac{3}{7}\times\frac{3}{5}-\frac{1}{14}$ (क्रम–विनिमेयता से)

$=\frac{2}{5}\times\frac{-3}{7}+(\frac{-3}{7})\times\frac{3}{5}-\frac{1}{14}$

$=\frac{-3}{7}(\frac{2}{5}+\frac{3}{5})-\frac{1}{14}=\frac{-3}{7}(\frac{2+3}{5})-\frac{1}{14}$ (वितरकता से)

$=-\frac{3}{7}\times1-\frac{1}{14}=-\frac{3}{7}-\frac{1}{14}=\frac{-6-1}{14}=\frac{-7}{14}=-\frac{1}{2}$

(b) $\frac{15}{8}\times\frac{5}{2}\times\frac{4}{25}\times\frac{6}{11}=\frac{15\times5\times4\times6}{8\times2\times25\times11}=\frac{3\times3}{2\times11}=\frac{9}{22}$

उदाहरण 15 :– रिक्त स्थान को भरिए $\frac{11}{24}\div(\dots\dots\dots)=\frac{-11}{15}$

हल : मान लिया कि $\frac{11}{24}\div(\frac{a}{b})=\frac{-11}{15}$

$\Rightarrow \frac{11}{24}\times\frac{b}{a}=\frac{-11}{15} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{-11}{15}\times\frac{24}{11}=\frac{-8}{5}$

$\frac{a}{b}=\frac{5}{-8}=\frac{-5}{8}$

अतः रिक्त स्थान पर संख्या $-\frac{5}{8}$ है।

प्रश्नावली 1.3

(1) निम्नलिखित को सत्यापित कीजिए।

(a) $\frac{3}{8}\times\frac{5}{9}=\frac{5}{9}\times\frac{3}{8}$ (b) $\frac{-7}{9}\times\frac{3}{14}=\frac{3}{14}\times\frac{-7}{9}$

(2) निम्नलिखित को सत्यापित कीजिए।

(a) $(\frac{-5}{2}\times\frac{-7}{4})\times\frac{1}{3}=\frac{-5}{2}\times(\frac{-7}{4}\times\frac{1}{3})$ (b) $(\frac{3}{5}\times\frac{-2}{11})\times\frac{5}{4}=\frac{3}{5}\times(\frac{-2}{11}\times\frac{5}{4})$

(3) रिक्त स्थानों की पूर्ति करें।

(a) $\frac{-8}{7} \times \frac{21}{12} = \frac{21}{12} \times (..........)$ (b) $(..........) \times \frac{15}{17} = \frac{15}{17} \times \frac{-4}{3}$

(c) $\frac{9}{8} \div (..........) = \frac{-3}{2}$ (d) $-21 \times \frac{-5}{9} = \frac{-5}{9} \times (..........)$

(4) निम्नलिखित के गुणात्मक प्रतिलोम (व्युत्क्रम) ज्ञात कीजिए।

(a) $\frac{12}{23}$ (b) $\frac{-11}{19}$ (c) 5 (d) -1 (e) $\frac{2}{-5}$

(5) निम्नलिखित को सत्यापित कीजिए।

(a) $\frac{3}{5} \times (\frac{2}{7} + \frac{3}{7}) = (\frac{3}{5} \times \frac{2}{7}) + (\frac{3}{5} \times \frac{3}{7})$ (b) $\frac{4}{5} \times (\frac{8}{13} - \frac{5}{13}) = (\frac{4}{5} \times \frac{8}{13}) - (\frac{4}{5} \times \frac{5}{13})$

(6) गुणन पर योग एवं व्यवकलन पर वितरण गुण के उपयोग से निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए।

(a) $\frac{-3}{7} \times \frac{5}{12} + \frac{11}{12} \times \frac{-3}{7}$ (b) $\frac{5}{8} \times \frac{7}{12} - \frac{13}{24} \times \frac{5}{8}$

(c) $\frac{-16}{7} \times \frac{-3}{7} + \frac{11}{12} \times \frac{-3}{7}$ (d) $\frac{-3}{5} \times (\frac{5}{13} - \frac{9}{13})$

(7) निम्नलिखित प्रत्येक के लिए गुणन के अन्तर्गत उपयोग किए गए गुणधर्मों का नाम लिखिए।

(a) $\frac{-11}{14} \times \frac{-3}{5} = \frac{-3}{5} \times \frac{-11}{14}$ (b) $(\frac{-5}{2} \times \frac{-7}{4}) \times \frac{1}{3} = \frac{-5}{2} \times (\frac{-7}{4} \times \frac{1}{3})$

(c) $\frac{-4}{7} \times 1 = 1 \times \frac{-4}{7} = \frac{-4}{7}$ (d) $\frac{-9}{16} \times \frac{16}{-9} = \frac{16}{-9} \times \frac{-9}{16} = 1$

(e) $(\frac{-3}{4} \times \frac{5}{6}) \times \frac{1}{2} = \frac{-3}{4} \times (\frac{5}{6} \times \frac{1}{2})$ (f) $\frac{-17}{19} \times 0 = 0$

(8) मान ज्ञात कीजिए।

(a) $\frac{2}{5} \times \frac{(-21)}{28} \times \frac{15}{30} \times \frac{7}{-35}$ (b) $\frac{3}{5} \times \frac{(-17)}{21} \times \frac{36}{85} \times \frac{30}{18}$

(9) सत्यापित कीजिए कि निम्नलिखित कथन सत्य है अथवा असत्य।

(a) $\frac{2}{3} \div \frac{-8}{9} = \frac{-8}{9} \div \frac{2}{3}$ (b) $-9 \div \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \div (-9)$

(10) बताइए :–

(a) ऐसी परिमेय संख्या जिसका कोई व्युत्क्रम नहीं है।

(b) परिमेय संख्याएँ जो अपने व्युत्क्रम के समान है।

(c) परिमेय संख्या जो अपने ऋणात्मक के समान है।

(d) क्या परिमेय संख्याएँ भाग के अन्तर्गत सदैव संवृत हैं?

(e) क्या परिमेय संख्याएँ भाग के अन्तर्गत सदैव क्रमविनिमेय हैं?

(f) क्या परिमेय संख्याएँ भाग के अन्तर्गत साहचर्य हैं?

(g) क्या हम 1 को 0 से भाग कर सकते हैं?

(11) रिक्त स्थानों को भरिए।

(a) शून्य का व्युत्क्रम ....है।

(b) संख्याएँ ....तथा ....स्वयं के व्युत्क्रम हैं।

(c) परिमेय संख्या तथा उसके व्युत्क्रम का गुणनफल ....है।

(d) दो परिमेय संख्याओं का गुणनफल हमेशा .... है।

(e) किसी धनात्मक परिमेय संख्या का व्युत्क्रम .... है।

(f) किसी ऋणात्मक परिमेय संख्या का व्युत्क्रम .... है।

(g) $\frac{1}{x}$ (x≠0) का व्युत्क्रम .... है।

(h) किसी परिमेय संख्या का शून्य से विभाजन .... है।

(12) उत्तर दीजिए –

(a) क्या $-1\frac{1}{8}$ का गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{8}{9}$ है? क्यों अथवा क्यों नहीं?

(b) क्या $3\frac{1}{3}$ का गुणात्मक प्रतिलोम 0.3 है? क्यों अथवा नहीं?

(c) क्या 0.4 का व्युत्क्रम $\frac{5}{2}$ है?

(d) $\frac{6}{13}$ को $\frac{-7}{16}$ के व्युत्क्रम से गुणा करने पर कितना होगा?

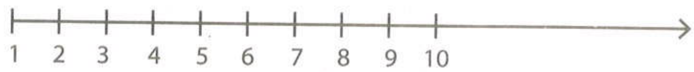
(e) $(\frac{5}{7}+\frac{2}{7})\times 5$ का मान क्या होगा?

(f) $\frac{0}{2}$ का व्युत्क्रम क्या होगा?

1.5 परिमेय संख्याओं का संख्या रेखा पर निरूपण

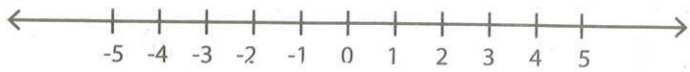
पिछली कक्षा में हम प्राकृत संख्याओं, पूर्ण संख्याओं, पूर्णांकों को संख्या रेखा पर निरूपित करना सीख चुके हैं। आइए हम उनकी पुनरावृत्ति कर लें।

(i) प्राकृत संख्याएँ :–



(ii) पूर्ण संख्याएँ :–

(iii) पूर्णांक :–



1.5.1 संख्या रेखा पर परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$ को निरूपित करने की विधि

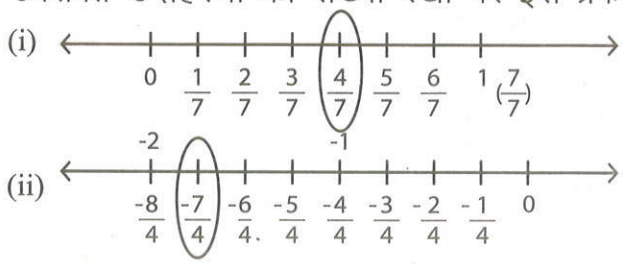
चरण 1:– प्रथम इकाई (0 और 1 के बीच की दूरी) को b (हर) बराबर भागों में बाँटिए।

चरण 2: शून्य के दाईं ओर a (अंश) बराबर भागों को गिनिए और चिह्नित कीजिए। यह $\frac{a}{b}$ को दर्शाता है।

चरण 3 : $\frac{-a}{b}$ को दर्शाने के लिए शून्य के बाईं ओर a (अंश) बराबर भागों को गिनिए और चिह्नित कीजिए। यह $\frac{-a}{b}$ को दर्शाएगा।

उदाहरणार्थः $\frac{4}{7}$ का अर्थ है कि शून्य के दाईं तरफ सात समान भागों में से 4 को लिया गया है और $\frac{-7}{4}$ का अर्थ है कि हम शून्य के बाईं तरफ 7 चिह्न लगाते हैं जिनमें से प्रत्येक की दूरी $\frac{1}{4}$ है। सातवाँ चिह्न $\frac{-7}{4}$ है।

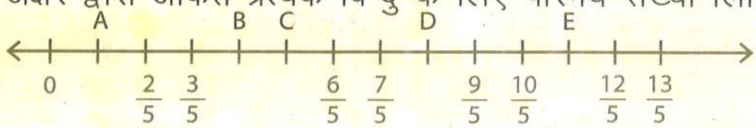
उपरोक्त उदाहरणों को संख्या रेखा पर इस प्रकार दर्शाते हैं।



प्रयास कीजिए : D

(1) संख्या रेखा पर $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{-1}{9}$, $\frac{-3}{9}$, तथा $\frac{-7}{9}$ को दर्शाइए।

(2) अक्षर द्वारा अंकित प्रत्येक बिन्दु के लिए परिमेय संख्या लिखिए।



1.6 दो परिमेय संख्याओं के बीच परिमेय संख्याएँ

दो परिमेय संख्याओं के बीच की परिमेय संख्याओं को पता करने से पहले हम देखते हैं कि दो प्राकृत संख्याओं के बीच कितनी प्राकृत संख्याएँ तथा दो पूर्णांकों के बीच कितने पूर्णांक स्थित है? कुछ उदाहरण लेते हैं –

(i) 1 और 5 के बीच कुल तीन प्राकृत संख्याएँ हैं 2, 3 और 4।

(ii) 6 और 8 के बीच एकमात्र प्राकृत संख्या 7 है।

(iii) क्या आप बता सकते हैं कि 9 और 10 के बीच कितनी प्राकृत संख्याएँ हैं? स्पष्ट रूप से एक भी नहीं।

(iv) –4 और 3 के बीच छह पूर्णांक -3, -2, -1, 0, 1, 2 है।

(v) -1 और 1 के बीच एक मात्र पूर्णांक 0 है।

अतः हम दो पूर्णांकों के बीच निश्चित प्राकृत संख्याएँ या पूर्णांक पाते हैं।

इन्हें हम निम्न उदाहरणों से समझेंगे –

(a) $\frac{2}{9}$ और $\frac{7}{9}$ के बीच आप कितनी परिमेय संख्याएँ प्राप्त कर सकते है? निश्चित रूप से $\frac{2}{9}$ और $\frac{7}{9}$ के बीच परिमेय संख्याएँ $\frac{3}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}$ और $\frac{6}{9}$ हैं।

लेकिन क्या $\frac{2}{9}$ और $\frac{7}{9}$ के बीच केवल यही चार परिमेय संख्याएँ हैं? आइए, जानने के लिए हम इन्हें समतुल्य परिमेय संख्याओं के रूप में लिखते हैं।

$$\frac{2}{9} = \frac{2}{9} \times \frac{2}{2} = \frac{4}{18} \text{ तथा } \frac{7}{9} \times \frac{2}{2} = \frac{14}{18}$$

अब यदि हम $\frac{4}{18}$ और $\frac{14}{18}$ को लेते हैं तो हम $\frac{2}{9}$ तथा $\frac{7}{9}$ के बीच भी परिमेय संख्याओं की सूची में निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को शामिल कर सकते हैं।

$$\frac{5}{18}, \frac{6}{18}, \frac{7}{18}, \text{------------------} \frac{12}{18}, \frac{13}{18}$$

(b) $\frac{3}{10}$ और $\frac{7}{10}$ के बीच कितनी परिमेय संख्याएँ हैं? निश्चित रूप से $\frac{3}{10}$ और $\frac{7}{10}$ के बीच की परिमेय संख्याएँ $\frac{4}{10}, \frac{5}{10}$ तथा $\frac{6}{10}$ है।

अब हम $\frac{3}{10}$ को $\frac{30}{100}$ तथा $\frac{7}{10}$ को $\frac{70}{100}$ लिख सकते हैं।

अब संख्याएँ $\frac{31}{100}, \frac{32}{100}, \frac{33}{100}, \ldots\ldots\ldots \frac{69}{100}$ सभी $\frac{3}{10}$ और $\frac{7}{10}$ के बीच परिमेय संख्याएँ हैं। इनकी संख्या 39 है।

इसी प्रकार, $\frac{3}{10}$ को $\frac{300}{1000}$ तथा, $\frac{7}{10}$ को $\frac{700}{1000}$ के रूप में लिखा जा सकता है। अब हम पाते हैं कि परिमेय संख्याएँ $\frac{301}{1000}, \frac{302}{1000}, \frac{303}{1000}, \ldots\ldots\ldots \frac{698}{1000}, \frac{699}{1000}$ सभी $\frac{3}{10}$ और $\frac{7}{10}$ के बीच में है। इनकी संख्या 399 है। इस प्रकार हम $\frac{3}{10}$ और $\frac{7}{10}$ के बीच में अधिक से अधिक

संख्याओं का समावेश कर सकते हैं।

उपर्युक्त उदाहरणों से पता चलता है कि प्राकृत संख्याओं और पूर्णांकों की तरह दो परिमेय संख्याओं के बीच पाई जाने वाली परिमेय संख्या परिमित नहीं है।

अतः हम कह सकते हैं कि कोई भी दो परिमेय संख्याओं के बीच में अपरिमित संख्याएँ प्राप्त होती हैं।

1.6.1 अन्य विधि

पिछली कक्षा में हम माध्य के बारे में पढ़ चुके हैं। माध्य की अवधारणा का उपयोग हम दो परिमेय संख्याओं के बीच परिमेय संख्याएँ ज्ञात करने के लिए कर सकते हैं।

1 और 2 के बीच परिमेय संख्याएँ ज्ञात करने के लिए हम 1 और 2 का माध्य निकालते है।

यहाँ 1 और 2 का माध्य $= \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$ (एक परिमेय संख्या)

अर्थात 1 और 2 के बीच परिमेय संख्या $\frac{3}{2}$ है।

इस प्रकार $1 < \frac{3}{2} < 2$

पुनः 1 और $\frac{3}{2}$ के बीच में एक परिमेय संख्या $= \frac{1}{2}(1+\frac{3}{2}) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{4}$ है।

अतः $1 < \frac{5}{4} < \frac{3}{2} < 2$

व्यापक रूप में, यदि a और b कोई दो परिमेय संख्याएँ हैं तो a और b के बीच

माध्य $= \frac{a+b}{2} < b$

आगे a और $\frac{a+b}{2}$ के बीच परिमेय संख्या $= \{a+(\frac{a+b}{2})\} \div 2$ है।

इसी प्रकार, हम असीमित परिमेय संख्याएँ प्राप्त कर सकते हैं।

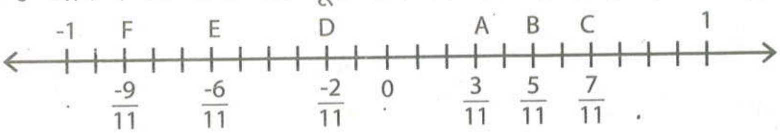
प्रयास कीजिए : E

(i) −5 और 4 के बीच स्थित पूर्णांकों को लिखिए।

(ii) $\frac{1}{4}$ और $\frac{1}{2}$ के मध्य एक परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

उदाहरण 16 :– संख्या रेखा पर $\frac{3}{11}, \frac{5}{11}, \frac{7}{11}, \frac{-2}{11}, \frac{-6}{11}$ और $\frac{-9}{11}$ को दर्शाइए।

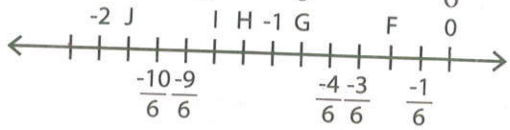
हल :– प्रथम इकाई 0 और 1 के बीच की दूरी को 11 बराबर भागों में बाँटिए। एक भाग $\frac{1}{11}$ को दर्शाता है।



बिन्दु A, B, C, D, E तथा F क्रमशः $\frac{3}{11}, \frac{5}{11}, \frac{7}{11}, \frac{-2}{11}, \frac{-6}{11}$ तथा $\frac{-9}{11}$ को दर्शाता है।

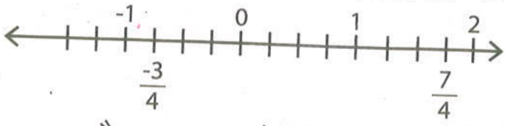
उदाहरण 17 :– अक्षर द्वारा अंकित प्रत्येक बिन्दु के लिए परिमेय संख्या लिखिए।

हल :– $F = \frac{-2}{6}, G = \frac{-5}{6}, H = \frac{-7}{6}, I = \frac{-8}{6}$ तथा $J = \frac{-11}{6}$



उदाहरण 18 :– संख्या रेखा पर निम्नलिखित संख्याओं को निरूपित कीजिए।

(i) $\frac{7}{4}, -\frac{3}{4}$



हलः (i) चूँकि दोनों संख्याओं का हर 4 है। अतः 0 के दोनों ओर प्रत्येक इकाई की दूरी को हम 4 बराबर भागों में बाँटेंगे। ऋणात्मक संख्या के लिए हम 0 के बाईं ओर जाएँगे तथा धनात्मक संख्या के लिए हम 0 के दाईं ओर जाएँगे।

अतः बिन्दु A तथा B क्रमशः $\frac{7}{4}$ तथा $-\frac{3}{4}$ को निरूपित करता है।

उदाहरण 19 :– ऐसी पाँच परिमेय संख्याएँ लिखिए जो 2 से छोटी हो।

हल :– चूँकि सभी पूर्णांक परिमेय संख्याएँ हैं। इसलिए 2 से छोटी पाँच परिमेय संख्याएँ हैं –
-3, -2, -1, 0, 1

उदाहरण 20 :– –2 और 0 के मध्य तीन परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल. :– –2 को $\frac{-20}{10}$ तथा 0 को $\frac{0}{10}$ के रूप में लिख सकते हैं। तथा –2 और 0 के मध्य में परिमेय संख्याएँ $\frac{-19}{10}, \frac{-18}{10}, \frac{-17}{10} \cdots \frac{-1}{10}$ प्राप्त करते हैं। हम इनमें से कोई भी तीन संख्याएँ अपने उत्तर के लिए ले सकते हैं।

उदाहरण 21 :– $\frac{2}{5}$ और $\frac{2}{3}$ के मध्य तीन परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : सबसे पहले हम $\frac{2}{5}$ और $\frac{2}{3}$ को समान हर वाली परिमेय संख्याओं के रूप में परिवर्तित करेंगे।

$\frac{2}{5} = \frac{2\times3}{5\times3} = \frac{6}{15}$ और $\frac{2}{3} = \frac{2\times5}{3\times5} = \frac{10}{15}$

अतः $\frac{2}{5}$ और $\frac{2}{3}$ के बीच तीन परिमेय संख्याएँ $\frac{7}{15}, \frac{8}{15}$ तथा $\frac{9}{15}$ हैं।

उदाहरण 22 :– $\frac{1}{3}$ और $\frac{1}{2}$ के बीच एक परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : $\frac{1}{3}$ और $\frac{1}{2}$ का मध्य $= \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) \div 2$

$$= \left(\frac{2+3}{6}\right) \div 2 = \frac{5}{6} \div 2 = \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$$

अतः $\frac{1}{3}$ और $\frac{1}{2}$ के बीच एक परिमेय संख्या $\frac{5}{12}$ है।

उदाहरण 23 :– $\frac{1}{4}$ और $\frac{1}{2}$ के मध्य तीन परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : हम दी हुई संख्याओं का मध्य ज्ञात करते हैं।

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) \div 2 = \left(\frac{1+2}{4}\right) \div 2 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

अतः $\frac{1}{4}$ और $\frac{1}{2}$ के मध्य $\frac{3}{8}$ स्थित है।

अर्थात्, $\frac{1}{4} < \frac{3}{8} < \frac{1}{2}$

अब $\frac{1}{4}$ और $\frac{3}{8}$ के बीच में एक और परिमेय संख्या ज्ञात करते हैं।

इसके लिए हम $\frac{1}{4}$ और $\frac{3}{8}$ का मध्य निकालते है।

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\right) \div 2 = \left(\frac{2+3}{8}\right) \div 2 = \frac{5}{8} \div 2 = \frac{5}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{16}$$

अतः $\frac{1}{4} < \frac{5}{16} < \frac{3}{8} < \frac{1}{2}$

अब पुनः $\frac{3}{8}$ और $\frac{1}{2}$ का मध्य निकालते हैं।

$$\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\right) \div 2 = \left(\frac{3+4}{8}\right) \div 2 = \frac{7}{8} \div 2 = \frac{7}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{16}$$

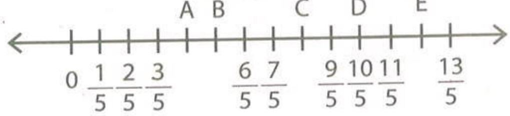
अतः $\frac{1}{4} < \frac{5}{16} < \frac{3}{8} < \frac{7}{16} < \frac{1}{2}$

इस प्रकार, $\frac{1}{4}$ और $\frac{1}{2}$ के मध्य तीन परिमेय संख्याएँ $\frac{5}{16}, \frac{3}{8}, \frac{7}{16}$ हैं।

प्रश्नावली 1.4

(1) संख्या रेखा पर $\frac{2}{9}, \frac{5}{9}, \frac{-1}{9}, \frac{-3}{9}, \frac{-5}{9}$ और $\frac{-8}{9}$ को निरूपित कीजिए।

(2) अक्षर द्वारा अंकित प्रत्येक बिन्दु के लिए परिमेय संख्या लिखिए।



(3) निम्नलिखित संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए।

(a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{-5}{6}$ (c) $\frac{0}{5}$ (d) $\frac{5}{3}$ (e) $\frac{-11}{6}$

(4) निम्नलिखित संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए।

(a) $\frac{4}{3}, \frac{-2}{3}$ (b) $\frac{-9}{7}, \frac{7}{7}$

(5) ऐसी पाँच परिमेय संख्याएँ लिखिए जो

(a) −2 से छोटी हों। (b) −2 से बड़ी हों।

(6) इनके मध्य तीन परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

(a) -1 और 0 (b) -3 और 1

(7) इनके मध्य पाँच परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

(a) $\frac{2}{3}$ और $\frac{4}{5}$ (b) $\frac{3}{5}$ और $\frac{3}{4}$ (c) $\frac{-1}{3}$ और $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{-3}{2}$ और $\frac{5}{3}$

(8) इनके मध्य दस परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

(a) $\frac{1}{4}$ और $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{-2}{5}$ और $\frac{1}{2}$

(9) बताइए निम्नलिखित कथन सही है या नहीं।

(a) प्रत्येक पूर्णांक एक परिमेय संख्या है।

(b) दो परिमेय संख्याओं के बीच पायी जाने वाली परिमेय संख्याएँ असीमित हैं।

(c) $\frac{-3}{5}$ और 0 के मध्य कोई परिमेय संख्या नहीं है।

(d) 0 एक परिमेय संख्या है।

मुख्य बातें

* ऐसी संख्याएँ जो $\frac{p}{q}$ के रूप में हो जहाँ p और q पूर्णांक हो और $q \neq 0$ हो, परिमेय संख्याएँ कहलाती हैं।
* एक परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ को मानक रूप में व्यक्त की हुई कही जाती है यदि उसका हर (q) धनात्मक पूर्णांक हो तथा p एवं q का 1 के अतिरिक्त कोई गुणनखण्ड न हो।
* परिमेय संख्याएँ योग, व्यवकलन एवं गुणन के अन्तर्गत संवृत हैं।
* केवल शून्य को छोड़कर सभी परिमेय संख्याएँ भाग के अन्तर्गत संवृत हैं।
* परिमेय संख्याओं का योग एवं गुणन क्रमविनिमेय तथा साहचर्य है।
* परिमेय संख्याओं का व्यवकलन एवं विभाजन क्रमविनिमेय नहीं है।
* शून्य, परिमेय संख्याओं के लिए योज्य तत्समक है।
* परिमेय संख्याएँ $\frac{a}{b}$ और $\frac{-a}{b}$ एक दूसरे के योज्य प्रतिलोम हैं ($\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = 0$)।
* 1 परिमेय संख्याओं के लिए गुणात्मक तत्समक है।
* किसी परिमेय संख्या और 0 का गुणनफल 0 होता है।
* यदि $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = 1$ तो परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$ का व्युत्क्रम $\frac{c}{d}$ है।
* परिमेय संख्याएँ a तथा $\frac{1}{a}$ एक दूसरे के व्युत्क्रम हैं।
* परिमेय संख्याओं की वितरकता परिमेय संख्याएँ a, b और c के लिए
  $a(b + c) = a \times b + a \times c$ और $a (b - c) = a \times b - a \times c$
* दी हुई दो परिमेय संख्याओं के मध्य अपरिमित परिमेय संख्याएँ होती हैं।
* परिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित किया जा सकता है।