Roll No. ....

D–3226

B. A. (Part II) EXAMINATION, 2020

MATHEMATICS

Paper First

(Advanced Calculus)

Time : Three Hours] [*Maximum Marks : 50*

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न से कोई **दो** भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

All questions are compulsory. Attempt any *two* parts of each question. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) दर्शाइये कि अनुक्रम $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, जहाँ :

$$S_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

अभिसारी है।

Show that the sequence $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, where :

$$S_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

is convergent.

(ब) दर्शाइये कि :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n!)^{1/n}} = e$$

Show that :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n!)^{1/n}} = e$$

(स) निम्नलिखित श्रेणी के अभिसरण का परीक्षण कीजिए :

$$\frac{x}{1} + \frac{1}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{x^7}{7} + \ldots$$

Test the convergence for the following series :

$$\frac{x}{1} + \frac{1}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{x^7}{7} + \ldots$$

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) निम्नलिखित फलन के सांतत्य की जाँच मूलबिन्दु पर कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^{1/x}}{1+e^{1/x}}, & \text{यदि } x \neq 0 \\ 0, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$$

Test the following function for continuity at the origin :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^{1/x}}{1+e^{1/x}}, & \text{if } x \neq 0 \\ 0, & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

(ब) दर्शाइये कि फलन :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{जब } x \geq 1 \\ 1 - x, & \text{जब } x < 1 \end{cases}$$

$x = 1$ पर अवकलनीय नहीं है।

Show that the function $f(x)$ defined by :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{when } x \geq 1 \\ 1 - x, & \text{when } x < 1 \end{cases}$$

is not differentiable at $x = 1$.

(स) यदि :

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x+\theta h)$$

तो θ का मान ज्ञात कीजिए, जबकि $x \to a$, $f(x) = (x-a)^{5/2}$ ।

If :

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x+\theta h)$$

then find the value of θ, when $x \to a$, $f(x) = (x-a)^{5/2}$.

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) सिद्ध कीजिए कि फलन :

$$f(x,y) = \begin{cases} y \sin\dfrac{1}{x} + x \sin\dfrac{1}{y}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

मूलबिन्दु पर संतत है।

Prove that the function :

$$f(x,y) = \begin{cases} y \sin\dfrac{1}{x} + x \sin\dfrac{1}{y}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

is continuous at the origin.

(ब) यदि :

$$x^x y^y z^z = c$$

तो दर्शाइये कि $x = y = z$ पर :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -(x \log_e x)^{-1}$$

If :

$$x^x y^y z^z = c$$

then show that :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -(x \log_e x)^{-1}$$

when $x = y = z$.

(स) तीन चरों के एक समाघात फलन के लिए ऑयलर प्रमेय का कथन कीजिए और सिद्ध कीजिए।

State and prove Euler's theorem for a homogeneous function of three variables.

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) सरल रेखाओं के कुल :

$$ax \sec\alpha - by \operatorname{cosec}\alpha = a^2 - b^2$$

का अन्वालोप ज्ञात कीजिए, जहाँ कोण α प्राचल है।

Find the envelope of the family of lines :

$$ax \sec\alpha - by \operatorname{cosec}\alpha = a^2 - b^2$$

where the parameter is the angle α.

(ब) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ का केन्द्रज ज्ञात कीजिए।

Find the evolute of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

(स) सिद्ध कीजिए कि दिये हुए आयतन वाले सभी आयत फलकों में घन न्यूनतम पृष्ठ वाला होता है।

Prove that of all rectangular parallelopipes of the same volume, the cube has the least surface.

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_0^1 x^{n-1} \left(\log \frac{1}{x} \right)^{m-1} dx = \frac{\Gamma(m)}{n^m}, \ (m, n > 0)$$

Prove that :

$$\int_0^1 x^{n-1} \left(\log \frac{1}{x} \right)^{m-1} dx = \frac{\Gamma(m)}{n^m}, \ (m, n > 0)$$

(ब) दिखाइये कि :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} \times \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\, dx = \pi$$

Show that :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} \times \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\, dx = \pi$$

(स) समाकलन का क्रम बदलिये :

$$\int_0^{2a} \int_{\sqrt{2ax - x^2}}^{\sqrt{2ax}} V \, dx \, dy$$

Change the order of integration in :

$$\int_0^{2a} \int_{\sqrt{2ax - x^2}}^{\sqrt{2ax}} V \, dx \, dy$$