Roll No. ....

D–3159

B. A. (Part I) EXAMINATION, 2020

(Old Course)

MATHEMATICS

Paper First

(Algebra and Trigonometry)

Time : Three Hours] [*Maximum Marks : 50*

नोट : प्रत्येक इकाई से कोई **दो** भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Attempt any *two* parts of each Unit. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) निम्नलिखित आव्यूह की जाति तथा शून्यता ज्ञात कीजिए :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ -2 & -6 & -8 & -6 \\ 3 & 9 & 12 & 9 \\ -1 & -3 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

Find the rank and nullity of the matrix given below :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ -2 & -6 & -8 & -6 \\ 3 & 9 & 12 & 9 \\ -1 & -3 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

(ब) हर्मिटीय आव्यूह को परिभाषित कीजिए एवं उदाहरण दीजिए। सिद्ध कीजिए कि हर्मिटीय आव्यूह का प्रत्येक विकर्ण प्रविष्टि वास्तविक होता है।

Define Hermitian matrix with example. Prove that every diagonal entry of Hermitian matrix is real.

(स) यदि $f : A \to B$ तथा $g : B \to C$ दो एकैक आच्छादक प्रतिचित्रण हों, तो सिद्ध कीजिए कि $g \circ f : A \to C$ भी एक एकैक आच्छादक प्रतिचित्रण होगा तथा $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ ।

If $f : A \to B$ and $g : B \to C$ are two one-one and onto mappings, then prove that $g \circ f : A \to C$ is also one-one and onto mapping and $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) दर्शाइये कि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ अपने अभिलाक्षणिक समीकरण को संतुष्ट करता है। अतः A^{-1} ज्ञात कीजिए।

Show that the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ satisfies its own characteristic equation. Hence find A^{-1}.

(ब) आव्यूह विधि से हल कीजिए :

$$2x + 3y + z = 9$$
$$x + 2y + 2z = 6$$
$$3x + y + 2z = 8$$

Solve by matrix method :

$$2x + 3y + z = 9$$
$$x + 2y + 2z = 6$$
$$3x + y + 2z = 8$$

(स) निम्नलिखित आव्यूह के सभी अभिलाक्षणिक मान तथा अभिलाक्षणिक सदिश ज्ञात कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Find all the eigen value and eigen vector for the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

इकाई—3

(UNIT—3)

3\. (अ) समीकरण $2x^3 + x^2 - 7x - 6 = 0$ को हल कीजिए, जबकि दो मूलों का अन्तर 3 है।

Solve the equation $2x^3 + x^2 - 7x - 6 = 0$, when the difference of two roots is 3.

(ब) उचित प्रतिस्थापन द्वारा निम्नलिखित समीकरण से दूसरा पद हटाइये :

$$x^3 + 6x^2 - 7x - 4 = 0$$

By proper substitution remove the second term of the equation :

$$x^3 + 6x^2 - 7x - 4 = 0$$

(स) कार्डन विधि से समीकरण को हल कीजिए :

$$x^3 - 18x - 35 = 0$$

Solve the equation $x^3 - 18x - 35 = 0$, by Cardon's method.

इकाई—4

(UNIT—4)

4\. (अ) लैग्रांज प्रमेय को कथन देकर सिद्ध कीजिए।

State and prove Lagrange's theorem.

(ब) सिद्ध कीजिए कि दो उपवलयों का सर्वनिष्ठ एक उपवलय होता है।

Prove that the intersection of two subrings is a subring.

(स) परिमित आबेली समूह को परिभाषित कीजिए एवं सिद्ध कीजिए कि इकाई के चतुर्थ मूलों का समुच्चय $\{1, -1, i, -i\}$ गुणन संक्रिया के अन्तर्गत एक परिमित आबेली समूह है।

Define finite abelian group and prove that the set of fourth roots of unity $\{1, -1, i, -i\}$ forms an finite abelian group with respect to multiplication.

इकाई—5

(UNIT—5)

5\. (अ) यदि n कोई धन पूर्णांक है, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\left(\frac{n}{2}\right)+1} \cos\frac{n\pi}{4}$$

If n is any positive integer, then prove that :

$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\left(\frac{n}{2}\right)+1} \cos\frac{n\pi}{4}$$

(ब) यदि $\sin(\theta + i\phi) = \tan\alpha + i\sec\alpha$, तब सिद्ध कीजिए कि :

$$\cos 2\theta \cosh 2\phi = 3$$

If $\sin(\theta + i\phi) = \tan\alpha + i\sec\alpha$, then prove that :

$$\cos 2\theta \cosh 2\phi = 3$$

(स) सिद्ध कीजिए कि :

$$32\cos^6\theta = \cos 6\theta + 6\cos 4\theta + 15\cos 2\theta + 10$$

Prove that :

$$32\cos^6\theta = \cos 6\theta + 6\cos 4\theta + 15\cos 2\theta + 10$$