Roll No. ....

E–3768

B. Sc. (Part III) EXAMINATION, 2021

MATHEMATICS

Paper First

(Analysis)

Time : Three Hours] [*Maximum Marks : 50*

नोट : प्रत्येक इकाई से कोई दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Attempt any *two* parts of each Unit. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) एक द्विक श्रेणी $\sum_{\min} a_{mn}$ की अभिसारिता के लिए आवश्यक प्रतिबंध यह है कि :

$$\lim_{\min \to \infty} a_{mn} = 0\,.$$

A necessary condition for the convergence of a double series $\sum_{\min} a_{mn}$ is that :

$$\lim_{\min \to \infty} a_{mn} = 0\,.$$

(ब) फलन :

$$f(x, y) = x^2 y^2 + \sin x + \cos y$$

के लिए मूलबिन्दु पर यंग प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

Verify the Young's theorem at origin for the function :

$$f(x, y) = x^2 y^2 + \sin x + \cos y\,.$$

(स) अंतराल $(-\pi, \pi)$ में फलन $f(x)$ की फोरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए, जहाँ :

$$f(x) = \begin{cases} \cos x\,, & 0 \le x \le \pi \\ -\cos x\,, & -\pi \le x < 0 \end{cases}$$

Find the Fouries series of the function $f(x)$ in the interval $(-\pi, \pi)$, where :

$$f(x) = \begin{cases} \cos x\,, & 0 \le x \le \pi \\ -\cos x\,, & -\pi \le x < 0 \end{cases}.$$

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) माना कि $f(x) = x^2$ अंतराल $[0, a]$ में जहाँ $a > 0$ । दिखाइए कि $f \in \mathrm{R}[0, a]$ और :

$$\int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}.$$

Let $f(x) = x^2$ on $[0, a]$, where $a > 0$. Show that $f \in \mathrm{R}[0, a]$ and :

$$\int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}.$$

(ब) बीटा फलन की :

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

अभिसारिता का परीक्षण कीजिए।

Test the convergence of the beta function :

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

(स) यदि $|\alpha|<1$, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_0^\pi \frac{\log(1+\alpha\cos x)}{\cos x}\,dx = \pi\sin^{-1}\alpha .$$

If $|\alpha|<1$, then prove that :

$$\int_0^\pi \frac{\log(1+\alpha\cos x)}{\cos x}\,dx = \pi\sin^{-1}\alpha .$$

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) द्विरैखिक रूपांतरण :

$$w = \frac{(2+i)z-2}{z+i}$$

का स्थिर बिन्दु और प्रसामान्य रूप ज्ञात कीजिए।

Find the fixed points and the normal form of the bilinear transformation :

$$w = \frac{(2+i)z-2}{z+i} .$$

(ब) दिखाइए कि रूपांतरण :

$$w = \frac{5-4z}{4z-2}$$

वृत्त $|z|=1$ को w-सतह पर इकाई त्रिज्या के वृत्त पर रूपांतरित करता है और इस वृत्त का केन्द्र ज्ञात कीजिए।

Show that the transformation :

$$w = \frac{5-4z}{4z-2}$$

transforms the circle $|z|=1$ into a circle of radius unity in w-plane and find the centre of the circle.

(स) दिखाइए कि रूपांतरण :

$$(w+1)^2 = \frac{4}{z}$$

परवलय $y^2 = 4(1-x)$ के बाहरी क्षेत्र को w-सतह में इकाई वृत्त के आंतरिक भाग पर रूपांतरित करता है।

Show that the transformation :

$$(w+1)^2 = \frac{4}{z}$$

transforms the region outside the parabola $y^2 = 4(1-x)$ into the interior of the unit circle in w-plane.

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) किसी दूरीक समष्टि में प्रत्येक विवृत गोला विवृत समुच्चय होता है।

In a metric space every open sphere is an open set.

(ब) सिद्ध कीजिए कि ऐसा कोई पूर्णांक अस्तित्व में नहीं है जिसके लिए $\sqrt{r+1}+\sqrt{r-1}$ एक परिमेय संख्या है।

Prove that there exists no integer for which $\sqrt{r+1}+\sqrt{r-1}$ is a rational number.

(स) यदि x और y दो दी हुई वास्तविक संख्याएँ हैं और $x>0$, तब एक प्राकृत संख्या n का अस्तित्व इस प्रकार है कि $nx>y$ ।

If x and y are two given real numbers and $x > 0$, then there exists a natural number n such that $nx > y$.

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) लिण्डेलॉफ प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove Lindelof's theorem.

(ब) हीन बीरेल प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove Heine Borel theorem.

(स) R का उपसमुच्चय A संयुक्त होता है यदि और केवल यदि यह एक अंतराल हो।

A subset A of R is connected if and only if it is an interval.