Roll No. .....

E–3233

B. A. (Part II) EXAMINATION, 2021

MATHEMATICS

Paper First

(Advanced Calculus)

Time : Three Hours] [*Maximum Marks : 50*

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न से कोई दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

All questions are compulsory. Attempt any *two* parts of each question. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) दर्शाइये कि :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n!)^{1/n}} = e$$

P. T. O.

Show that :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n!)^{1/n}} = e$$

(ब) निम्नलिखित श्रेणी के अभिसरण का परीक्षण कीजिए :

$$\frac{x}{1} + \frac{1}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{x^7}{7} + \text{.....}$$

Test the convergence of the following series :

$$\frac{x}{1} + \frac{1}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{x^7}{7} + \text{.....}$$

(स) दर्शाइये कि श्रेणी $\Sigma(-1)^n \sqrt{n^2+1} - n$ प्रतिबन्धी अभिसारी है।

Show that the series $\Sigma(-1)^n \sqrt{n^2+1} - n$ is conditionally convergent.

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) $x = 1$ पर निम्नलिखित फलन के सांतत्य की विवेचना कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & \text{जब} \, 0 \le x \le 1 \\ 1-x, & \text{जब} \, x > 1 \end{cases}$$

Discuss the continuity of the following function at $x = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & \text{when } 0 \le x \le 1 \\ 1 - x, & \text{when } x > 1 \end{cases}$$

(ब) यदि :

$$f(x) = \begin{cases} 0 \dfrac{x}{1 + e^{1/x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

दर्शाइये कि f, $x = 0$ पर संतत है किन्तु $f'(0)$ विद्यमान नहीं है।

If :

$$f(x) = \begin{cases} 0 \dfrac{x}{1 + e^{1/x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

show that f is continuous at $x = 0$ but does not exist $f'(0)$.

(स) सिद्ध कीजिए कि :

$$\sin ax = ax - \frac{a^3x^3}{3!} + \frac{a^5x^5}{5!} + \ldots\ldots + \frac{a^{n-1}x^{n-1}}{(n-1)!} \sin\left(\frac{n-1}{2}\pi\right)$$

$$+ \frac{a^n x^n}{n!} \sin\left(a\theta x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

Prove that :

$$\sin ax = ax - \frac{a^3x^3}{3!} + \frac{a^5x^5}{5!} + ... + \frac{a^{n-1}x^{n-1}}{(n-1)!}\sin\left(\frac{n-1}{2}\pi\right)$$

$$+ \frac{a^n x^n}{n!}\sin\left(a\theta x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) $\in -\delta$ तकनीक के प्रयोग से सिद्ध कीजिए कि :

$$\lim_{(x,\,y)\to(1,1)} (x^2 + 2y) = 3$$

Using $\in -\delta$ technique, prove that :

$$\lim_{(x,\,y)\to(1,1)} (x^2 + 2y) = 3$$

(ब) सिद्ध कीजिए कि :

$$\sin x \sin y = xy - \frac{1}{6}\{(x^3 + 3xy^2)\cos\theta x \sin\theta y$$

$$+ (y^3 + 3x^2 y)\sin\theta x \cos\theta y$$

Prove that :

$$\sin x \sin y = xy - \frac{1}{6}\{(x^3 + 3xy^2)\cos\theta x \sin\theta y$$

$$+ (y^3 + 3x^2 y)\sin\theta x \cos\theta y$$

(स) यदि :

$$x + y + z = u$$

$$y + z = uv$$

$$z = uvw$$

तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = u^2 v .$$

If :

$$x + y + z = u$$

$$y + z = uv$$

$$z = uvw$$

then prove that :

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = u^2 v .$$

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) फलन $u = x^2 + y^2 + z^2$ का निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए, जहाँ $ax + by + cz = p$ दिया गया है।

Find the minimum value of function $u = x^2 + y^2 + z^2$, where $ax + by + cz = p$ is given.

(ब) परवलय $y^2 = 4ax$ का केन्द्रज ज्ञात कीजिए।

Find the evolute of the parabola $y^2 = 4ax$.

(स) $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{k^2 - \alpha^2} = 1$ द्वारा दिये गये वक्र परिवार का एन्वेलोप ज्ञात कीजिए, जहाँ α प्राचल है।

Find the envelope of family of curves given by $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{k^2 - \alpha^2} = 1$, where α is parameter.

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) सिद्ध कीजिए कि :

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

Prove that :

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

(ब) सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan\theta}\, d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Prove that :

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan\theta}\, d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

(स) निम्नलिखित में समाकलन का क्रम बदलिये :

$$\int_0^{2a} \int_{x^2/4a}^{3a-x} V \, dx \, dy$$

Change the order of integration in the following :

$$\int_0^{2a} \int_{x^2/4a}^{3a-x} V \, dx \, dy$$