Roll No. .....

E–3235

B. A. (Part II) EXAMINATION, 2021

MATHEMATICS

Paper Third

(Mechanics)

Time : Three Hours] [*Maximum Marks : 50*

नोट : प्रत्येक इकाई से कोई दो प्रश्न हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Attempt any *two* questions from each Unit. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) एक समांग दण्ड, जिसकी लम्बाई $2a$ है, सन्तुलित अवस्था में है जबकि उसका एक सिरा एक चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार पर टिका हुआ है और उसकी लम्बाई का एक बिन्दु एक चिकने क्षैतिज छड़ पर रखा हुआ है। छड़ दीवार के समान्तर और दीवार से b दूरी पर है। सिद्ध कीजिए कि छड़ का ऊर्ध्वाधर से झुकाव $\sin^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{1/3}$ है।

A uniform beam, of length $2a$, rests in equilibrium with one end resting against a smooth vertical wall and with a point of its length resting upon a smooth horizontal rod which is parallel to the wall and at distance b from it. Show that the inclination of the beam to the vertical is $\sin^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{1/3}$.

(ब) एक ठोस गोला उससे दुगुनी त्रिज्या के एक स्थिर रुक्ष अर्द्ध-गोल प्याले के अंदर रखा हुआ है। दर्शाइये कि गोले के उच्चतम बिन्दु से कितना ही बड़ा वजनी एक भार संबंधित कर दिया जाये, साम्यावस्था स्थायी रहती है।

A Solid sphere rests inside a fixed rough hemispherical bowl of twice its radius. Show that, however large a weight is attached to, the highest point of the sphere, the equilibrium is stable.

(स) भार W की एक समांग डोरी को एक ही स्तर पर स्थित दो बिन्दुओं से लटकाया गया है और एक भार W' इसके निम्नतम बिन्दु से संबद्ध कर दिया गया है। यदि α और β अब उच्चतम और निम्नतम बिन्दुओं पर स्पर्श रेखाओं का क्षैतिज से झुकाव है, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = 1 + \frac{W}{W'}.$$

A uniform string of weight W is suspended from two points at the same level and a weight W' is attached to its lowest point. If α and β are now the inclination to

the horizontal of the tangent at the lowest and the highest points, prove that :

$$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = 1 + \frac{W}{W'}.$$

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) किसी दिये गये बल-निकाय के केन्द्रीय अक्ष का समीकरण ज्ञात कीजिए।

To find the equation of the central axis of any given system of forces.

(ब) डायनमे में X, Y, Z, L, M, N के लिए समतल $x + y + z = 0$ की शून्य विक्षेप स्थिति ज्ञात कीजिए।

Find the null point of the plane $x + y + z = 0$ for the dyname X, Y, Z, L, M, N .

(स) बराबर बल सरल रेखाओं :

$$\frac{x \pm a\cos\theta}{a\sin\theta} = \frac{y - b\sin\theta}{\pm b\cos\theta} = \frac{z}{c}$$

में से प्रत्येक के अनुदिश क्रिया करता है। दर्शाइये कि उनके केन्द्रीय अक्ष, θ के सभी मानों के लिए, पृष्ठ $y\left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) = b\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)$ पर स्थित है।

The equal forces act along each of the straight line :

$$\frac{x \pm a\cos\theta}{a\sin\theta} = \frac{y - b\sin\theta}{\pm b\cos\theta} = \frac{z}{c}$$

Show that their central axis must, for all values of θ, lie on the surface :

$$y\left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) = b\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)$$

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) सरल आवर्त गति में, यदि किसी सरल रेखा पर एक स्थिर बिन्दु, जो बल केन्द्र नहीं है, से दूरियों a, b, c पर वेग u, v, w हों, तो दर्शाइये कि अवधि T निम्नलिखित समीकरण से दी जाती है :

$$\frac{4\pi^2}{T^2}\ b-c \quad c-a \quad a-b\ = \begin{vmatrix} u^2 & v^2 & w^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

If in a simple harmonic motion u, v, w be the velocities at distances a, b, c from a fixed point on the straight line which is not the centre of force, show that the period T is given by the equation :

$$\frac{4\pi^2}{T^2}\ b-c \quad c-a \quad a-b\ = \begin{vmatrix} u^2 & v^2 & w^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

(ब) एक समतल में गतिमान एक कण का त्रिज्य एवं अनुप्रस्थ वेग एवं त्वरण ज्ञात कीजिए।

To find the radial and transverse velocities and accelerations of a particle moving in a plane curve.

(स) एक कण एक समतल में एक त्वरण, जो समतल में सदैव एक निश्चित बिन्दु की ओर दिष्ट है, के अन्तर्गत गति करता है। पथ का ध्रुवीय रूप में अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

A particle moves in a plane with an acceleration which is always directed to a fixed point O in the plane; to obtain the differential equation of its path in polar form.

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) यदि v_1 व v_2 ग्रह के रैखिक वेग हैं जबकि यह सूर्य से क्रमशः निकटतम व दूरस्थ है, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$1 - e \; v_1 = 1 + e \; v_2$$

If v_1 and v_2 are the linear velocities of a planet when it is respectively nearest and farthest from the sun, prove that :

$$1 - e \; v_1 = 1 + e \; v_2$$

(ब) एक बिन्दु एकसमान चाल v से चक्रज $S = 4a \sin \psi$ पर गमन करता है। पथ के किसी बिन्दु पर त्वरण ज्ञात कीजिए।

A point describes the cycloid $S = 4a \sin \psi$ with uniform speed v. Find its acceleration at any point.

(स) ऊर्जा संरक्षण का सिद्धान्त लिखिये और सिद्ध कीजिए।

State and prove the principle of conservation of energy.

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) कोई कण किसी चिकने क्षैतिज समतल के अनुगत वेग V से प्रक्षिप्त किया जाता है। माध्यम का अवरोध प्रति इकाई द्रव्यमान वेग के घन का μ गुना है। दर्शाइये कि कण द्वारा t समय में चली दूरी $\frac{1}{\mu V}\left[\sqrt{1+2\mu t\, V^2}^{\,1/2}-1\right]$ है और तब इसका वेग $\frac{V}{\sqrt{1+2\mu V^2 t}}$ है।

A particle is projected with velocity V along a smooth horizontal plane in a medium whose resistance per unit mass is μ times the cube of the velocity. Show that the distance it has described in time t is $\frac{1}{\mu V}\left[\sqrt{1+2\mu t\, V^2}^{\,1/2}-1\right]$ and that its velocity then is $\frac{V}{\sqrt{1+2\mu V^2 t}}$.

(ब) ध्रुवीय निर्देशांकों के पदों में किसी कण का त्वरण ज्ञात कीजिए।

To find acceleration of a particle in terms of polar co-ordinates.

(स) एक रॉकेट का कुल प्रारम्भिक द्रव्यमान (ईंधन + बक्सा) m_0 है। अचर दर cm_0 से ईंधन फेंकता है और बक्से के सापेक्ष इसका वेग V है। दर्शाइये कि ईंधन के उपभोग की निम्निष्ठ दर जो रॉकेट को तुरन्त ऊपर उठने देगा, $c = \frac{g}{V}$ है। यह मानते हुए कि रॉकेट की बनावट इन प्रतिबन्धों को सन्तुष्ट करती है, रॉकेट की महत्तम चाल तथा प्राप्त ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

A rocket whose total initial mass (fuel + shell) is m_0 ejects fuel at a constant rate cm_0 and at a velocity V relative to the case. Show that the lowest rate of fuel consumption that will permit the rocket to rise at once is $c = \frac{g}{V}$. Assuming this design condition is met, find the greatest speed and height reached by the rocket.